CAPÍTULO

4

Análisis nodal y de malla básicos

CONCEPTOS CLAVE

- Análisis nodal.
- Técnica del supernodo.
- Análisis de malla.
- Técnica de la supermalla.
- Selección entre análisis nodal y de malla.
- Análisis asistido por computadora incluyendo PSpice y MATLAB.

INTRODUCCIÓN

Una vez que se conocen las leyes de Ohm y de Kirchhoff, el análisis de un circuito lineal simple para obtener información útil acerca de la corriente, la tensión o la potencia asociadas con un elemento en particular comienza a parecer una misión muy directa. Al menos hasta ahora, cada circuito parece ser único y requiere (hasta cierto punto) un grado de creatividad en el momento de realizar el análisis. En este capítulo se explicarán dos técnicas básicas de análisis de circuitos —el ***análisis nodal*** y el ***análisis de malla***— las cuales permiten analizar una gran cantidad de circuitos de una manera metódica y coherente. El resultado que se obtiene es un análisis más directo, un nivel de complejidad más uniforme en las ecuaciones, un menor número de errores y, quizás, lo más importante, una menor ocurrencia de "*¡Todavía no sé cómo empezar!*"

La mayor parte de los circuitos con los que se ha practicado son simples y (siendo honestos) de importancia práctica cuestionable; sin embargo, resultan útiles como ayuda para aprender a aplicar las técnicas fundamentales. Aunque los circuitos más complejos que aparecen en este capítulo pueden representar una gran variedad de sistemas eléctricos incluyendo circuitos de control, redes de comunicaciones, motores o circuitos integrados, así como modelos de circuitos eléctricos de sistemas no eléctricos, es mejor no profundizar en esos detalles específicos en esta etapa inicial. En lugar de lo anterior, es importante enfocarse en la *metodología para resolver problemas* que se desarrollará a lo largo de este libro.



4.1 ANÁLISIS NODAL

El estudio de métodos generales para el análisis metódico de circuitos se inicia con un método poderoso basado en LKC, llamado ***análisis nodal***. En el capítulo anterior se presentó el análisis de un circuito simple que contenía sólo dos nodos. Así se descubrió que el principal paso del análisis se presentaba cuando se obtenía una ecuación simple en términos de una incógnita simple: la tensión entre el par de nodos.

Se dejará que aumente el número de nodos y se proporcionará de manera correspondiente una cantidad desconocida adicional y una ecuación extra para cada nodo agregado. De tal modo, un circuito de tres nodos tendrá dos tensiones desconocidas y dos ecuaciones; uno de 10 nodos constará de nueve tensiones desconocidas y nueve ecuaciones; un circuito de N nodos se formará con $(N - 1)$ tensiones y $(N - 1)$ ecuaciones. Cada ecuación es una ecuación LCK simple.

Para ilustrar la mecánica básica de esta técnica, considere el circuito de tres nodos que se muestra en la figura 4.1*a*, que se dibuja nuevamente en la figura 4.1*b* para destacar el hecho de que sólo hay tres nodos, numerados de manera correspondiente. El objetivo será determinar la tensión en cada elemento y el paso siguiente del análisis es crítico. Se designa un nodo como ***nodo de referencia***; en este caso será la terminal negativa de las tensiones nodales $N - 1 = 2$ como se muestra en la figura 4.1*c*.

Se logra otra pequeña simplificación en las ecuaciones resultantes si el nodo conectado al mayor número de ramas se identifica como el nodo de referencia. Si hay un nodo de conexión a tierra, a menudo resulta más conveniente elegirlo como el nodo de referencia, aunque mucha gente prefiere seleccionar el nodo inferior de un circuito como la referencia, especialmente si no se especifica una tierra explícita.

La tensión del nodo 1 *en relación con el nodo de referencia* se define como v_1 y v_2 se define como la tensión del nodo 2 con respecto al nodo de referencia.

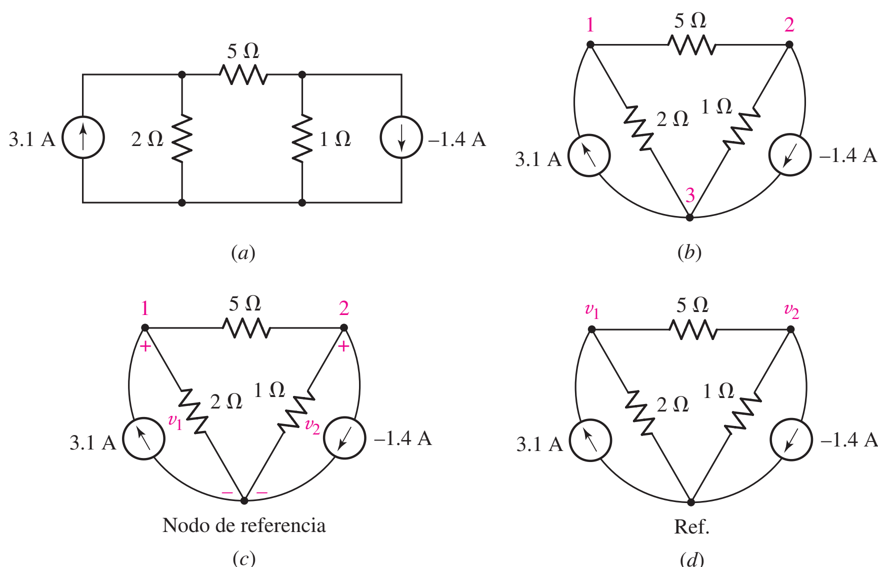


FIGURA 4.1 (*a*) Circuito simple de tres nodos. (*b*) Dibujo del circuito en donde se hace hincapié en los nodos. (*c*) Nodo de referencia elegido y tensiones asignadas. (*d*) Referencias de tensión abreviadas. Si se desea, un símbolo de conexión a tierra apropiado se podría sustituir por "Ref".

Ambas tensiones son suficientes, puesto que la tensión entre cualquier otro par de nodos puede determinarse en términos de ellos. Por ejemplo, la tensión del nodo 1 con respecto al nodo 2 es $v_1 - v_2$. Las tensiones v_1 y v_2 y sus signos de referencia se muestran en la figura 4.1*c*. Después de marcar el nodo de referencia es una práctica común omitir los signos de referencia para hacerlo más claro; el nodo marcado con la tensión se considera como la terminal positiva (fig. 4.1*d*), lo cual se entiende como un tipo de notación de tensión abreviada.

El nodo de referencia en un diagrama esquemático se define de manera explícita como cero volts. Sin embargo, resulta importante recordar que cualquier terminal puede ser designada como terminal de referencia. En consecuencia, el nodo de referencia está a cero volts con respecto a las otras tensiones nodales definidas, y no necesariamente con respecto a la *conexión a tierra*.

Ahora se aplicará la LCK a los nodos 1 y 2. Este paso se realiza igualando la corriente total que sale del nodo a través de varias resistencias con la corriente de fuente total que entra al nodo. De tal manera que

$$\frac{v_1}{2} + \frac{v_1 - v_2}{5} = 3.1 \qquad [1]$$

o

$$0.7v_1 - 0.2\,v_2 = 3.1 \qquad [2]$$

En el nodo 2 se obtiene

$$\frac{v_2}{1} + \frac{v_2 - v_1}{5} = -(-1.4) \qquad [3]$$

o

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = 1.4 \qquad [4]$$

Las ecuaciones [2] y [4] son las dos deseadas con dos incógnitas, y además se pueden resolver con facilidad. Los resultados son $v_1 = 5$ V y $v_2 = 2$ V.

A partir de este punto, se determina de manera directa la tensión en la resistencia de 5 Ω resistor: $v_{5\Omega} = v_1 - v_2 = 3$ V. Las corrientes y las potencias absorbidas también se pueden calcular en un paso.

En este punto se debe observar que existe más de una forma de escribir las ecuaciones LCK en el análisis nodal. Por ejemplo, el lector preferirá sumar todas las corrientes que ingresan a un determinado nodo y fijar esta cantidad a un valor cero. Por lo tanto, se pudo haber escrito para el nodo 1:

$$3.1 - \frac{v_1}{2} - \frac{v_1 - v_2}{5} = 0$$

o

$$3.1 + \frac{-v_1}{2} + \frac{v_2 - v_1}{5} = 0$$

las cuales son equivalentes a la ecuación [1]. ¿*Es una forma mejor que la otra*? Cada profesor y cada estudiante tiene una preferencia personal y, al final de cuentas, lo más importante es ser congruente. Los autores prefieren construir ecuaciones LCK para el análisis nodal de una manera tal que al final tengan todos los términos de fuentes de corriente de un lado y todos los términos de resistencia por otro. Específicamente,

Σ de corrientes que ingresan al nodo de las fuentes de corriente
= Σ de corrientes que abandonan el nodo a través de resistencias

Este método tiene varias ventajas. Primero, no puede existir confusión alguna con respecto a que si un término deba ser "$v_1 - v_2$" o "$v_2 - v_1$"; la primera tensión de cada expresión de corriente de resistencia corresponde al nodo para el

que se está escribiendo una expresión LCK, como se puede ver en las ecuaciones [1] y [3]. Segundo, permite verificar rápidamente que un término no se haya eliminado de manera accidental. Simplemente se deben contar las fuentes de corriente conectadas a un nodo y después las resistencias; además, agruparlas en la forma en que se mencionó hace un poco más fácil la comparación.

EJEMPLO 4.1

Determinar la corriente que fluye de izquierda a derecha a través de la resistencia de 15 Ω de la figura 4.2*a*.

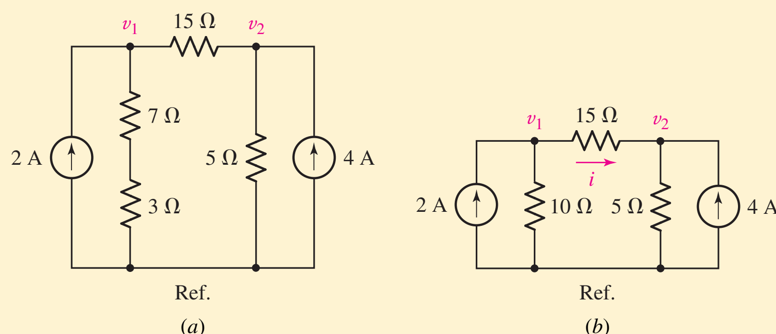


FIGURA 4.2 (*a*) Circuito de cuatro nodos que contiene dos fuentes de corriente independientes. (*b*) Las dos resistencias en serie se reemplazan por una sola resistencia de 10 Ω para reducir a tres nodos el circuito.

El análisis nodal arrojará valores numéricos para las tensiones nodales v_1 y v_2, y la corriente deseada está dada por $i = (v_1 - v_2)/15$.

Sin embargo, antes de comenzar el análisis nodal, se puede observar que no es de interés conocer los detalles respecto de las resistencias de 7 Ω y de 3 Ω. Por lo tanto, se pueden reemplazar sus combinaciones serie por una resistencia de 10 Ω como se muestra en la figura 4.2*b*. El resultado es una reducción del número de ecuaciones que se deben resolver.

Se escribe la ecuación LCK apropiada del nodo 1,

$$2 = \frac{v_1}{10} + \frac{v_1 - v_2}{15} \qquad [5]$$

y del nodo 2,

$$4 = \frac{v_2}{5} + \frac{v_2 - v_1}{15} \qquad [6]$$

Simplificando, se obtiene

$$5v_1 - 2v_2 = 60$$

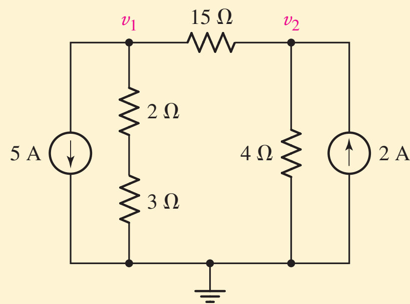
y

$$-v_1 + 4v_2 = 60$$

Despejando, se encuentra que $v_1 = 20$ V y $v_2 = 20$ de tal forma que $v_1 - v_2 = 0$. En otras palabras, ¡en este circuito fluye una ***corriente cero*** a través de la resistencia de 15 Ω!

PRÁCTICA

4.1 Determinar las tensiones nodales v_1 y v_2 del circuito de la figura 4.3.



■ **FIGURA 4.3**

Respuesta: $v_1 = -145/8$ V, $v_2 = 5/2$ V.

A continuación se aumentará el número de nodos de manera que se utilice esta técnica para resolver un problema un poco más difícil.

EJEMPLO 4.2

Determinar las tensiones de nodo del circuito de la figura 4.4*a*.

▶ ***Identificar el objetivo del problema.***
Hay cuatro nodos en este circuito. Si se elige el nodo inferior como referencia, se deben marcar los otros tres como se indica en la figura 4.4*b*. El circuito también se volvió a dibujar parcialmente por conveniencia.

▶ ***Recopilar la información conocida.***
Hay tres tensiones desconocidas, v_1, v_2 y v_3. Todas las fuentes de corriente y las resistencias tienen valores designados, las cuales se marcan sobre el esquema.

▶ ***Elaborar un plan.***
Este problema es bastante apropiado para la técnica del análisis nodal que se acaba de presentar, ya que es factible escribir tres ecuaciones LCK independientes en términos de las fuentes de corriente y de la corriente a través de cada resistencia.

▶ ***Construir un conjunto apropiado de ecuaciones.***
Se empieza escribiendo una ecuación LCK para el nodo 1:

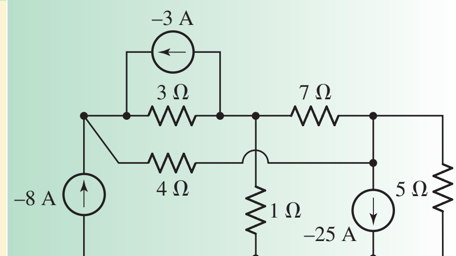
$$-8 - 3 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

o

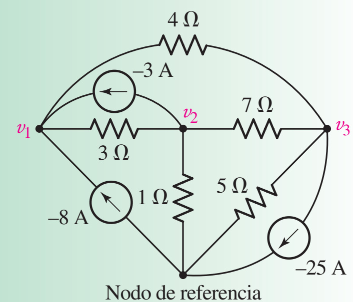
$$0.5833v_1 - 0.3333v_2 - 0.25v_3 = -11 \qquad [7]$$

En el nodo 2:

$$-(-3) = \frac{v_2 - v_1}{3} + \frac{v_2}{1} + \frac{v_2 - v_3}{7}$$



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 4.4** (*a*) Circuito de cuatro nodos. (*b*) Dibujo del circuito con el nodo de referencia elegido y las tensiones marcadas.

(Continúa en la siguiente página)

o

$$-0.3333v_1 + 1.4762v_2 - 0.1429v_3 = 3 \qquad [8]$$

Y, en el nodo 3:

$$-(-25) = \frac{v_3}{5} + \frac{v_3 - v_2}{7} + \frac{v_3 - v_1}{4}$$

o, de manera más simple,

$$-0.25v_1 - 0.1429v_2 + 0.5929v_3 = 25 \qquad [9]$$

▶ *Determinar si se requiere de información adicional.*

Hay tres ecuaciones con tres incógnitas. Siempre y cuando éstas sean independientes, lo anterior es suficiente para determinar las tres tensiones.

▶ *Intentar obtener la solución.*

Las ecuaciones [7] a la [9] se resuelven mediante la eliminación sucesiva de variables, el método de matrices o por medio de la *regla de Cramer y* los *determinantes.* Si se emplea el último método, descrito en el apéndice 2, se tiene:

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} -11 & -0.3333 & -0.2500 \\ 3 & 1.4762 & -0.1429 \\ 25 & -0.1429 & 0.5929 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -0.2500 \\ -0.3333 & 1.4762 & -0.1429 \\ -0.2500 & -0.1429 & 0.5929 \end{vmatrix}} = \frac{1.714}{0.3167} = 5.412 \text{ V}$$

De manera similar,

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.5833 & -11 & -0.2500 \\ -0.3333 & 3 & -0.1429 \\ -0.2500 & 25 & 0.5929 \end{vmatrix}}{0.3167} = \frac{2.450}{0.3167} = 7.736 \text{ V}$$

y

$$v_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -11 \\ -0.3333 & 1.4762 & 3 \\ -0.2500 & -0.1429 & 25 \end{vmatrix}}{0.3167} = \frac{14.67}{0.3167} = 46.32 \text{ V}$$

▶ *Verificar la solución. ¿Es razonable o es la que se esperaba?*

Una forma de verificar parte de la solución consiste en resolver las tres ecuaciones mediante otra técnica. Más allá de eso, ¿es posible determinar si las tensiones son valores "razonables"? Existe una corriente máxima posible de $3 + 8 + 25 = 36$ amperes en cualquier punto del circuito. La resistencia más grande es de 7 Ω, de modo que no es posible esperar ninguna magnitud de tensión superior a $7 \times 36 = 252$ V.

Desde luego, existen numerosos métodos disponibles para resolver sistemas de ecuaciones lineales, algunos de los cuales se describen detalladamente en el apéndice 2. Antes del advenimiento de la calculadora científica, la regla de Cramer que se utilizó en el ejemplo 4.2 era muy común para analizar circuitos, aunque a veces era muy tediosa en su implementación. Sin embargo, es muy sencillo utilizarla en una calculadora de cuatro funciones, por lo que es muy valioso

conocer esta técnica. Por otro lado MATLAB, aunque no es muy probable que se encuentre a la mano durante un examen, es un paquete de software muy poderoso que simplifica enormemente el proceso de solución; en el apéndice 6 se proporciona un breve tutorial para comenzar.

Para el escenario que se menciona en el ejemplo 4.2, existen varias opciones disponibles con MATLAB. Como primer paso, se pueden representar las ecuaciones [7]–[9] en ***forma matricial***:

$$\begin{bmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -0.25 \\ -0.3333 & 1.4762 & -0.1429 \\ -0.25 & -0.1429 & 0.5929 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

de modo que,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -0.25 \\ -0.3333 & 1.4762 & -0.1429 \\ -0.25 & -0.1429 & 0.5929 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

En MATLAB se escribe

```
>> a = [0.5833 -0.3333 -0.25; -0.3333 1.4762 -0.1429; -0.25 -0.1429 0.5929];
>> c = [-11; 3; 25];
>> b = a^-1 * c
b =

   5.4124
   7.7375
  46.3127

>>
```

donde espacios separan a los elementos a lo largo de las filas y un punto y coma separan las filas. La matriz denominada **b**, a la cual también se le conoce como ***vector*** puesto que tiene sólo una columna, es nuestra solución. Por ende, $v_1 = 5.412$ V, $v_2 = 7.738$ V y $v_3 = 46.31$ V (se ha incurrido en un error por redondeo).

Se pudo haber utilizado las ecuaciones LKC como se escribieron al principio si se emplea al procesador simbólico de MATLAB.

```
>> eqn1 = '-8 -3 = (v1 - v2)/ 3 + (v1 - v3)/ 4';
>> eqn2 = '-(-3) = (v2 - v1)/ 3 + v2/ 1 + (v2 - v3)/ 7';
>> eqn3 = '-(-25) = v3/ 5 + (v3 - v2)/ 7 + (v3 - v1)/ 4';
>> answer = solve(eqn1, eqn2, eqn3, 'v1', 'v2', 'v3');
>> answer.v1
ans =
720/133
>> answer.v2
ans =
147/19
>> answer.v3
ans =
880/19
>>
```

lo que resulta en respuestas exactas, sin errores por redondeo. La rutina *solve()* se invoca con la lista de ecuaciones simbólicas que se nombran como eqn1, eqn2 y eqn3; sin embargo, deben especificarse también las variables $v1$, $v2$ y $v3$. Si a *solve()* se le llama con un menor número de variables que de ecuaciones, se obtiene una solución algebraica. Vale la pena hacer un rápido comentario respecto de la forma de la solución; en el argot de programación, se refiere como algo que se conoce como una *estructura;* en este caso, a dicha estructura se le llama "respuesta". Se accede a cada componente de la estructura de manera separada por nombre, como se muestra.

PRÁCTICA

4.2 Calcular la tensión en cada fuente de corriente del circuito de la figura 4.5.

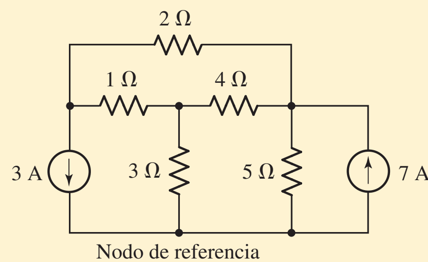


FIGURA 4.5

Respuesta: $v_{3A} = 5.235$ V; $v_{7A} = 11.47$ V.2

Los ejemplos anteriores han demostrado el método básico para realizar el análisis nodal, pero vale la pena considerar qué pasa si las fuentes dependientes también se encuentran presentes.

EJEMPLO 4.3

Determinar la potencia proporcionada por la fuente dependiente de la figura 4.6*a*.

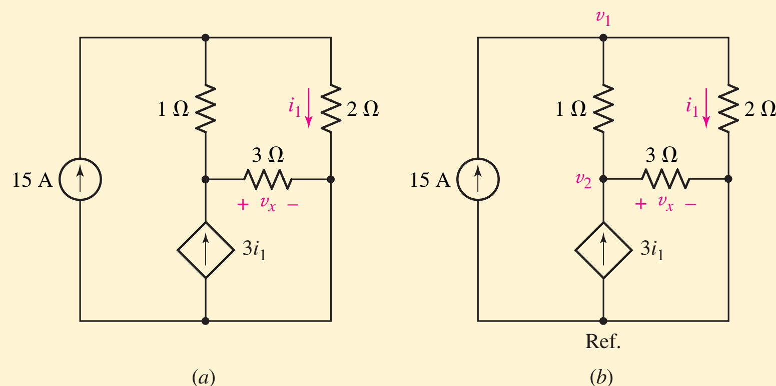


FIGURA 4.6 (*a*) Circuito de cuatro nodos que contiene una fuente de corriente dependiente. (*b*) Circuito marcado para el análisis nodal.

Se selecciona el nodo inferior como referencia, ya que cuenta con el número más grande de conexiones ramales y se procede a marcar las tensiones nodales v_1 y v_2 como se muestra en la figura 4.6*b*. La cantidad marcada v_x es, en realidad, igual a v_2.

En el nodo 1 se escribe

$$15 = \frac{v_1 - v_2}{1} + \frac{v_1}{2} \qquad [10]$$

y en el nodo 2,

$$3i_1 = \frac{v_2 - v_1}{1} + \frac{v_2}{3} \qquad [11]$$

Desafortunadamente, sólo hay dos ecuaciones pero con tres incógnitas, lo cual *es el resultado directo de la presencia de la fuente de corriente dependiente, puesto que no está controlada por una tensión nodal.* Por ende, es necesario desarrollar una ecuación adicional que relacione i_1 con una o más tensiones nodales.

En este caso se encuentra que

$$i_1 = \frac{v_1}{2} \qquad [12]$$

la cual sustituyéndola en la ecuación [11] obtenemos (con un poco de simplificación)

$$3v_1 - 2v_2 = 30 \qquad [13]$$

y la ecuación [10] se simplifica en

$$-15v_1 + 8v_2 = 0 \qquad [14]$$

Despejando, se encuentra que $v_1 = -40$ V, $v_2 = -75$ V e $i_1 = 0.5v_1 = -20$ A. Por lo tanto, la potencia suministrada por la fuente dependiente es igual a $(3i_1)(v_2) = (-60)(-75) = 4.5$ kW.

Se puede observar que la presencia de una fuente dependiente originará la necesidad de una ecuación adicional en el análisis si la cantidad controladora no es una tensión nodal. Ahora veamos el mismo circuito, pero con la variable controladora de la fuente de corriente dependiente cambiada a otro valor: la tensión de la resistencia de 3 Ω, la cual es de hecho una tensión nodal. Se encontrará que solamente se requieren *dos* ecuaciones para terminar el análisis.



EJEMPLO 4.4

Determinar la potencia suministrada por la fuente dependiente de la figura 4.7*a*.

Se selecciona el nodo inferior como nuestra referencia y se marcan las tensiones nodales como se muestra en la figura 4.7*b*. Se ha marcado la tensión nodal v_x explícitamente para efectos de claridad, pero no es necesaria esta redundancia. Obsérvese que la selección del nodo de referencia es importante en este caso; esto lleva a la cantidad v_x la cual es una tensión nodal.

La ecuación LCK del nodo 1 es,

$$15 = \frac{v_1 - v_x}{1} + \frac{v_1}{2} \qquad [15]$$

(Continúa en la siguiente página)

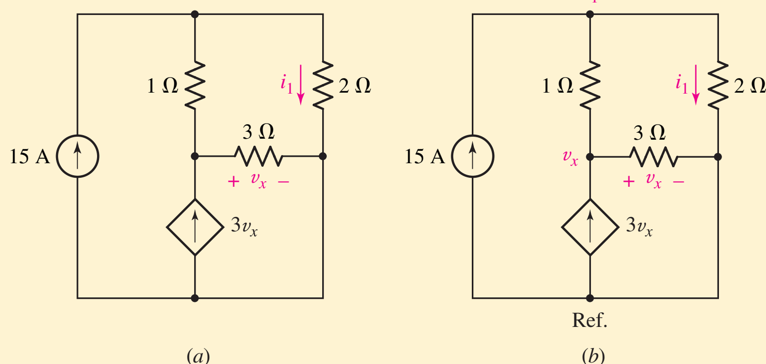


FIGURA 4.7 (*a*) Circuito de cuatro nodos que contiene una fuente de corriente dependiente. (*b*) Circuito marcado para el análisis nodal.

y la del nodo x es

$$3v_x = \frac{v_x - v_1}{1} + \frac{v_2}{3} \qquad [16]$$

Si se agrupan términos y se despeja, se encuentra que $v_1 = \frac{50}{7}$ V y $v_x = -\frac{30}{7}$ V. Por lo tanto, la fuente dependiente de este circuito genera $(3v_x)(v_x) = 55.1$ W.

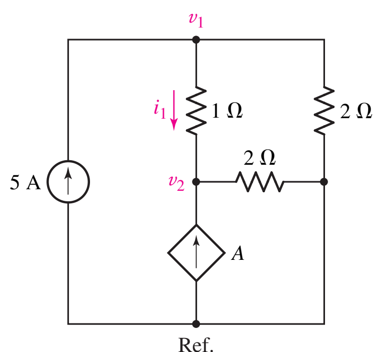


FIGURA 4.8

PRÁCTICA

4.3 Determinar la tensión nodal del circuito de la figura 4.8 v_1 si A es (*a*) $2i_1$; (*b*) $2v_1$.

Respuesta: (*a*) $\frac{70}{9}$ V; (*b*) –10 V.

Resumen del procedimiento básico del análisis nodal

1. **Contar el número de nodos** (N).
2. **Designar un nodo de referencia.** El número de términos en sus ecuaciones nodales pueden minimizarse seleccionando el nodo con el mayor número de ramas conectadas a él.
3. **Marcar las tensiones nodales** (Existen $N - 1$ tensiones).
4. **Escribir una ecuación de LCK de cada uno de los nodos excepto el de referencia.** Sumar las corrientes que fluyen hacia un nodo desde las fuentes en un miembro de la ecuación. Del otro lado, sumar las corrientes que circulan *hacia afuera* del nodo a través de las resistencias. Poner particular atención a los signos "–".
5. **Expresar cualquier incógnita adicional como corrientes o tensiones excepto tensiones nodales en términos de tensiones nodales apropiadas.** Esta situación puede presentarse si en el circuito hay fuentes de tensión o fuentes dependientes.
6. **Organizar las ecuaciones.** Agrupándolas de acuerdo con las tensiones nodales.
7. **Resolver el sistema de ecuaciones para encontrar las tensiones nodales** (Existen $N - 1$ tensiones).

Estos siete pasos básicos funcionarán bien en cualquier circuito que se encuentre, aunque se requerirá de especial cuidado si se presentan fuentes de tensión. En la sección 4.2 se analizan dichas situaciones.

4.2 EL SUPERNODO

A continuación se considera cómo las fuentes de tensión afectan la estrategia del análisis nodal.

Como un ejemplo común, considerar el circuito de la figura 4.9*a*. El circuito original de cuatro nodos de la figura 4.4 se cambió al sustituir la resistencia de 7 Ω entre los nodos 2 y 3 por una fuente de tensión de 22 V. Seguir asignando el mismo nodo a las tensiones de referencia v_1, v_2 y v_3. Antes, el siguiente paso era la aplicación de la LCK en cada uno de los nodos de no referencia. Si se trata de hacerlo otra vez, surgirán algunas dificultades en los nodos 2 y 3, ya que no se conoce cuál es la corriente en la rama con la fuente de tensión. No hay manera de que se pueda expresar la corriente como una función de la tensión, ya que la definición de una fuente de tensión señala precisamente que la tensión es independiente de la corriente.

Hay dos modos de salir de este dilema. El método más complicado consiste en asignar una corriente desconocida a la rama que contiene la fuente de tensión, proseguir para aplicar tres veces la LCK y luego aplicar una vez la LVK ($v_3 - v_2 = 22$) entre los nodos 2 y 3; el resultado consiste en cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas para este ejemplo.

El método más sencillo considera al nodo 2, al nodo 3 y a la fuente de tensión en conjunto como una especie de ***supernodo*** y se aplica la LCK en ambos nodos al mismo tiempo; el supernodo se indica por medio de una región encerrada por la línea punteada de la figura 4.9*a*. Esto es en verdad posible, debido a que si la corriente total que sale del nodo 2 es cero y la corriente total que sale del nodo 3 es nula, entonces la corriente total que sale de la combinación de los dos nodos es igual a cero. Este concepto se describe de manera gráfica en la vista ampliada de la figura 4.9*b*.

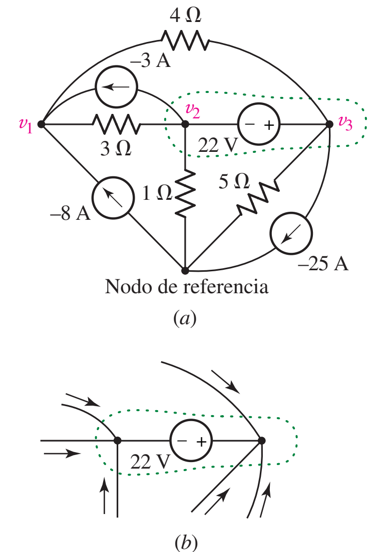


FIGURA 4.9 (*a*) Circuito del ejemplo 4.2 con una fuente de 22 V en lugar de la resistencia de 7 Ω. (*b*) Vista ampliada de la región definida como supernodo; la LCK requiere que todas las corrientes que fluyan hacia la región sumen cero, pues de otra forma los electrones se apilarían o desaparecerían.

EJEMPLO **4.5**

Determinar el valor de la tensión del nodo desconocido v_1 del circuito de la figura 4.9*a*.

La ecuación de la LCK del nodo 1 no presenta cambio respecto del ejemplo 4.2:

$$-8 - 3 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

o

$$0.5833v_1 - 0.3333v_2 - 0.2500v_3 = -11 \qquad [17]$$

A continuación se considera el supernodo 2,3. Se encuentran conectadas dos fuentes de tensión y cuatro resistencias. Por lo tanto,

$$3 + 25 = \frac{v_2 - v_1}{3} + \frac{v_3 - v_1}{4} + \frac{v_3}{5} + \frac{v_2}{1}$$

o

$$-0.5833v_1 + 1.3333v_2 + 0.45v_3 = 28 \qquad [18]$$

(Continúa en la siguiente página)

Puesto que hay tres incógnitas, se necesita una ecuación adicional, y además debe aprovecharse el hecho de que hay una fuente de tensión de 22 V entre los nodos 2 y 3:

$$v_2 - v_3 = -22 \qquad [19]$$

Al resolver las ecuaciones de [17] a [19], la solución de v_1 es 1.071 V.

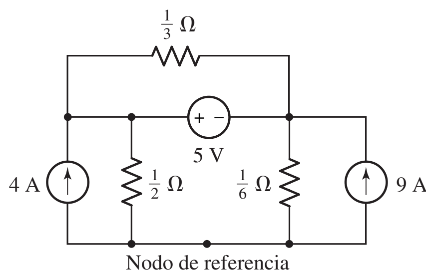


FIGURA 4.10

PRÁCTICA

4.4 Calcular la tensión en cada fuente de corriente del circuito de la figura 4.10.

Respuesta: 5.375 V, 375 mV.



De ese modo, la presencia de una fuente de tensión reduce en uno el número de nodos de no referencia en los que se debe aplicar la LCK, sin que importe si la fuente de tensión se extiende entre dos nodos de no referencia o si está conectada entre un nodo y la referencia. También es necesario ser cuidadosos cuando se analizan circuitos como el del problema de práctica 4.4. Puesto que ambos extremos de la resistencia son parte del supernodo, desde un punto de vista técnico debe haber dos términos de corriente correspondientes en la ecuación LCK, aunque se cancelan entre sí. Se puede resumir el método del supernodo de la manera siguiente:

Resumen del procedimiento de análisis del supernodo

1. **Contar el número de nodos** (N).
2. **Designar un nodo de referencia.** El número de términos en sus ecuaciones nodales pueden minimizarse seleccionando el nodo con el mayor número de ramas conectadas a él.
3. **Marcar las tensiones nodales** (habrá $N - 1$ tensiones).
4. **Si el circuito cuenta con fuentes de tensión, construir un supernodo alrededor de cada una.** Para hacer esta tarea debe encerrarse la fuente, sus dos terminales y cualquier otro elemento conectado entre las dos terminales dentro de un cuadro dibujado con línea punteada.
5. **Escribir una ecuación LCK de cada nodo de no referencia y de cada supernodo que *no contenga el nodo de referencia.*** Sumar las corrientes que circulen *hacia* un nodo/supernodo desde las fuentes de corriente en un miembro de la ecuación. En el otro miembro, sumar las corrientes que circulen hacia *afuera* del nodo/supernodo a través de las resistencias. Poner particular atención a los signos "—".
6. **Relacionar la tensión en cada fuente de tensión con las tensiones nodales.** Esta tarea se lleva a cabo aplicando LVK; es necesaria una ecuación por cada supernodo definido.
7. **Expresar cualquier incógnita adicional (es decir, corrientes o tensiones diferentes a las tensiones nodales) en términos de las tensiones nodales apropiadas.** Esta situación puede presentarse si existen fuentes dependientes en nuestro circuito.
8. **Organizar las ecuaciones.** Agrupar términos de acuerdo con las tensiones nodales.
9. **Resolver el sistema de ecuaciones para obtener las tensiones nodales** (habrá $N - 1$ ecuaciones).

Se puede observar que se han agregado dos pasos adicionales al procedimiento general de análisis nodal. Sin embargo, en realidad, la aplicación de la técnica del supernodo a un circuito que contenga fuentes de tensión no conectadas al nodo de referencia dará como resultado una reducción del número de ecuaciones LCK que sean necesarias. Tomando en cuenta lo anterior, considérese el circuito de la figura 4.11, que contiene los cuatro tipos de fuentes y cuenta con cinco nodos.

EJEMPLO 4.6

Determinar las tensiones entre cada nodo y el de referencia en el circuito de la figura 4.11.

Después de establecer un supernodo en torno a cada fuente de *tensión* es necesario escribir ecuaciones de LCK sólo del nodo 2 y del supernodo que contiene a la fuente de tensión dependiente. Por inspección, está claro que $v_1 = -12$ V.

En el nodo 2,

$$\frac{v_2 - v_1}{0.5} + \frac{v_2 - v_3}{2} = 14 \qquad [20]$$

mientras en el supernodo 3-4,

$$0.5v_x = \frac{v_3 - v_2}{2} + \frac{v_4}{1} + \frac{v_4 - v_1}{2.5} \qquad [21]$$

A continuación se relacionan las tensiones de fuente con las tensiones de nodo:

$$v_3 - v_4 = 0.2v_y \qquad [22]$$

y,

$$0.2v_y = 0.2(v_4 - v_1) \qquad [23]$$

Por último, se expresa la fuente de corriente dependiente en términos de las variables asignadas:

$$0.5v_x = 0.5(v_2 - v_1) \qquad [24]$$

Cinco nodos requieren *cuatro* ecuaciones LKC en el análisis nodal general, pero se ha reducido este requerimiento a *sólo dos,* ya que se formaron dos supernodos separados. Cada supernodo requiere una ecuación LVK (ecuación [22] y $v_1 = -12$, esta última escrita por inspección). Ninguna de las fuentes dependientes estuvo controlada por una tensión nodal, por lo que se necesitaron dos ecuaciones adicionales como resultado.

Una vez hecho lo anterior, se pueden eliminar v_x y v_y para obtener un conjunto de cuatro ecuaciones con las cuatro tensiones de nodo:

$$\begin{aligned}
-2v_1 + 2.5v_2 - 0.5v_3 \qquad\qquad &= 14 \\
0.1v_1 - v_2 + 0.5v_3 + 1.4v_4 &= 0 \\
v_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &= -12 \\
0.2v_1 \qquad + v_3 - 1.2v_4 &= 0
\end{aligned}$$

Despejando, se obtiene $v_1 = -12$ V, $v_2 = -4$ V, $v_3 = 0$ V y $v_4 = -2$ V.

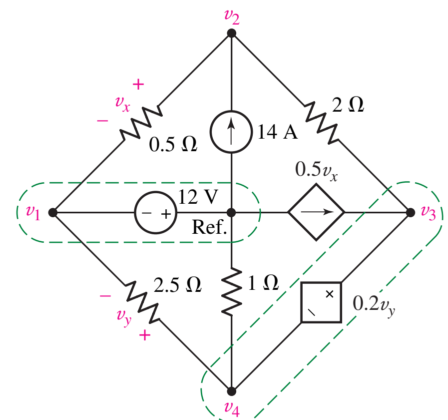


FIGURA 4.11 Circuito con cinco nodos con cuatro tipos diferentes de fuentes.

PRÁCTICA

4.5 Determinar las tensiones nodales del circuito de la figura 4.12.

Respuesta: $v_1 = 3$ V, $v_2 = 5.09$ V, $v_3 = 1.28$ V, $v_4 = 1.68$ V.

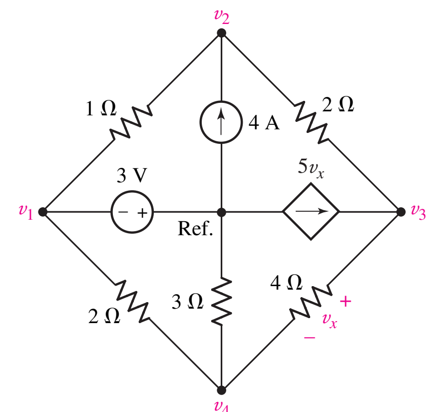


FIGURA 4.12

4.3 ANÁLISIS DE MALLA

La técnica del análisis nodal descrita en la sección anterior es muy general, por lo que siempre puede aplicarse a cualquier red eléctrica. Un método alternativo que en ocasiones resulta más fácil de aplicar en ciertos circuitos se conoce como ***análisis de malla.*** Si bien esta técnica no es aplicable a cualquier red, se puede utilizar en la mayor parte de las redes que se quieren analizar. El análisis de malla se aplica sólo en aquellas redes que son de forma plana, un término que es necesario definir.

Si se puede dibujar el esquema de un circuito sobre una superficie plana de manera tal que ninguna rama pase sobre o por debajo de cualquier otra rama, se afirma que es un ***circuito plano*** o de ***forma plana***. Por lo tanto, la figura 4.13*a* muestra una red de forma plana, la 4.13*b* presenta una red de forma no plana y la 4.13*c* muestra también una red de forma plana, aunque se dibuja de modo que parece ser no plana a primera vista.

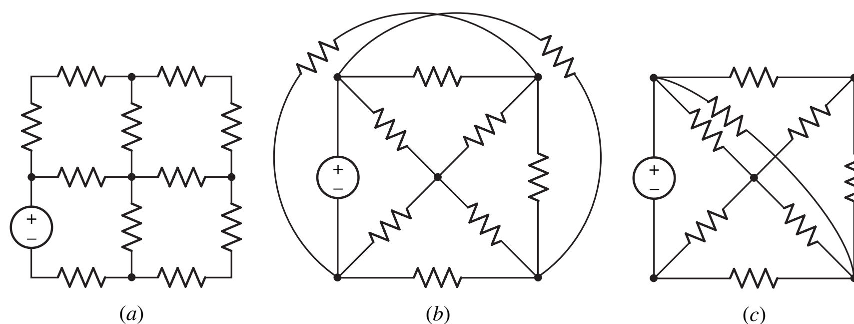


FIGURA 4.13 Ejemplos de redes de forma plana y no planas; los alambres que se cruzan sin que se señalen con un punto grueso no están en contacto físico entre sí.

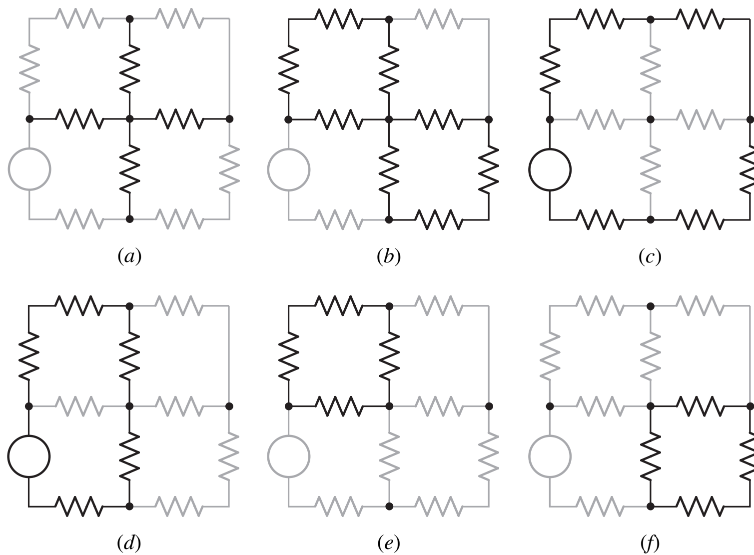
Es necesario mencionar que el análisis tipo malla se aplica a circuitos de forma no plana, pero como no es factible definir un conjunto completo de mallas únicas para este tipo de circuitos, no se pueden asignar corrientes de malla únicas.

En la sección 3.1 se definieron los términos ***trayectoria, trayectoria cerrada*** y ***lazo***. Antes de definir lo que es una malla, se debe considerar el conjunto de ramas dibujadas con líneas gruesas de la figura 4.14. El primer conjunto de ramas no es una trayectoria, puesto que cuatro ramas están conectadas al nodo central, y, desde luego, tampoco constituyen un lazo. El segundo conjunto de ramas no representa una trayectoria, puesto que sólo se recorre pasando dos veces a través del nodo central. Las cuatro trayectorias restantes corresponden a lazos. El circuito contiene 11 ramas.

La ***malla*** es una propiedad de un circuito de forma plana y no se define para un circuito de forma no plana, sino como un lazo que no contiene ningún otro lazo dentro de él. Así, los lazos indicados en la figura 4.14*c* y *d* no son mallas, en tanto que de las partes *e* y *f* sí lo son. Una vez que se ha dibujado un circuito de manera clara en forma plana, a menudo tiene la apariencia de una ventana con hojas de vidrio múltiples; puede considerarse que la frontera de cada vidrio de la ventana es una malla.

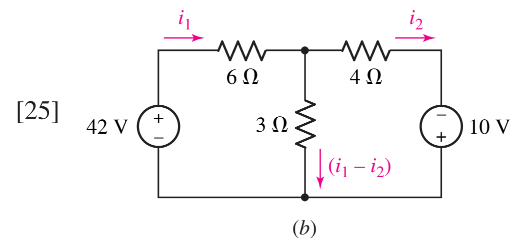
Si una red es de forma plana, el análisis de malla se utiliza para llevar a cabo su estudio. Esta técnica implica el concepto de ***corriente de malla,*** que presentamos al considerar el análisis del circuito de dos mallas de la figura 4.15*a*.

Del mismo modo que se procedió en el caso del circuito de un solo lazo, se definirá una corriente a través de una de las ramas. Vamos a denominar i_1 a la corriente que circula hacia la derecha a través de la resistencia de 6 Ω. Se aplicará la LVK alrededor de cada una de las dos mallas, y las dos ecuaciones resultantes son suficientes para determinar las dos corrientes desconocidas. Después



■ **FIGURA 4.14** (*a*) El conjunto de ramas especificadas por líneas gruesas no es ni una trayectoria ni un lazo. (*b*) En este caso, el conjunto de ramas no es una trayectoria, ya que pueden recorrerse sólo al pasar dos veces por el nodo central. (*c*) Esta trayectoria es un lazo pero no una malla, puesto que encierra otros lazos. (*d*) La trayectoria es también un lazo pero no una malla. (*e, f*) Cada una de estas trayectorias es un lazo y una malla.

se define una segunda corriente i_2, que fluye hacia la derecha en la resistencia de 4 Ω. También se podría denominar como i_3 a la corriente que fluye hacia abajo por la rama central, pero resulta evidente, a partir de la LCK, que i_3 puede expresarse en términos de las dos corrientes supuestas antes como $(i_1 - i_2)$. Las corrientes supuestas se muestran en la figura 4.15*b*.



■ **FIGURA 4.15** (*a, b*) Circuito simple para el que se requieren las corrientes.

Siguiendo el método de solución para el circuito de un lazo, se aplica ahora la LVK a la malla del lado izquierdo,

$$-42 + 6i_1 + 3(i_1 - i_2) = 0$$

o

$$9i_1 - 3i_2 = 42 \quad [25]$$

Aplicando la LVK en la malla del lado derecho,

$$-3(i_1 - i_2) + 4i_2 - 10 = 0$$

o

$$-3i_1 + 7i_2 = 10 \quad [26]$$

Las ecuaciones [25] y [26] son independientes; no es posible deducir una a partir de la otra. Hay dos ecuaciones y dos incógnitas, y la solución se obtiene sin ninguna dificultad:

$$i_1 = 6 \text{ A} \qquad i_2 = 4 \text{ A} \qquad \text{e} \qquad (i_1 - i_2) = 2 \text{ A}$$

Si el circuito contiene M mallas, entonces se espera tener M corrientes de malla y, por lo tanto, se requerirá escribir M ecuaciones independientes.

A continuación se considerará este mismo problema de una manera un poco diferente, mediante el uso de corrientes de malla. Se define una ***corriente de malla*** como aquella que fluye sólo alrededor del perímetro de una malla. Una de las grandes ventajas en el empleo de las corrientes de malla es el hecho de que la ley de Kirchhoff de corriente se satisface de manera automática. Si una corriente de malla fluye hacia un nodo determinado, también fluye *fuera* de él.

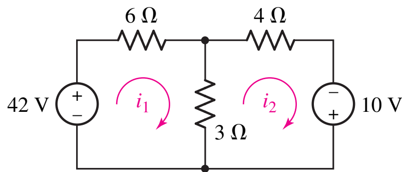


FIGURA 4.16 El mismo circuito que el de la figura 4.15*b*, pero visto de una manera un poco diferente.

A menudo se identifica una corriente de malla como una corriente de rama, al igual que i_1 e i_2 se identificaron en este ejemplo. Sin embargo, lo anterior no siempre es cierto, pues al considerar una red cuadrada de nueve mallas, la corriente de la malla central no puede identificarse como la corriente de alguna rama.

Si se marca como la malla 1 a la del lado izquierdo del problema, es factible establecer una corriente de malla i_1 que circula en la misma dirección que las manecillas de reloj alrededor de dicha malla. Una corriente de malla se indica por una flecha curva que casi se cierra sobre sí misma y se dibuja dentro de la malla apropiada, como en la figura 4.16. La corriente de malla i_2 se establece en la malla restante, otra vez en la dirección de las manecillas de reloj. Si bien las direcciones son arbitrarias, siempre se deben elegir las corrientes de malla en el sentido de las manecillas del reloj debido a que, en tal caso, en las ecuaciones se produce una cierta simetría de minimización de errores.

Ya no se cuenta con una corriente o una flecha de corriente que se muestre de manera directa sobre cada rama del circuito. La corriente a través de cualquier rama debe determinarse al considerar las corrientes de malla que fluyen en cada malla en la que aparece dicha rama. Esto no es difícil, debido a que ninguna rama puede aparecer en más de dos mallas. Por ejemplo, la resistencia 3 Ω aparece en ambas mallas, y la corriente que fluye hacia abajo a través de él es $i_1 - i_2$. La resistencia 6 Ω sólo aparece en la malla 1, y la corriente que fluye hacia la derecha en esa rama es igual a la corriente de malla i_1.

Para la malla de la izquierda,

$$-42 + 6i_1 + 3(i_1 - i_2) = 0$$

mientras que para la malla derecha,

$$3(i_2 - i_1) + 4i_2 - 10 = 0$$

así que estas dos ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones [25] y [26].

EJEMPLO 4.7

Determinar la potencia suministrada por la fuente de 2 V de la figura 4.17*a*.

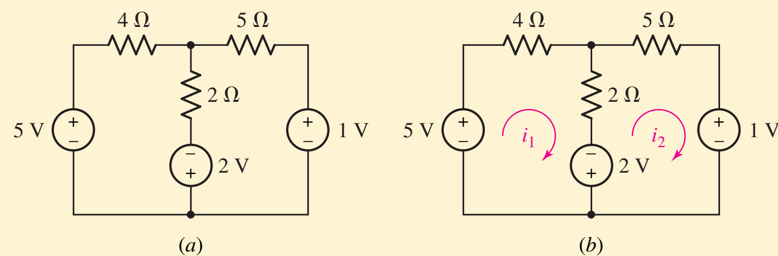


FIGURA 4.17 (*a*) Circuito de dos mallas que contiene tres fuentes. (*b*) Circuito marcado para el análisis de mallas.

Primero definimos dos corrientes de malla en el sentido de las manecillas del reloj en la figura 4.17*b*.

Comenzando en la parte inferior izquierda de la malla 1, se escribe la ecuación LVK siguiente a medida que se procede por las ramas en el sentido de las manecillas del reloj:

$$-5 + 4i_1 + 2(i_1 - i_2) - 2 = 0$$

Se hace lo mismo en la malla 2, por lo cual se puede escribir

$$+2 + 2(i_2 - i_1) + 5i_2 + 1 = 0$$

Simplificando y agrupando términos,

$$6i_1 - 2i_2 = 7$$

y

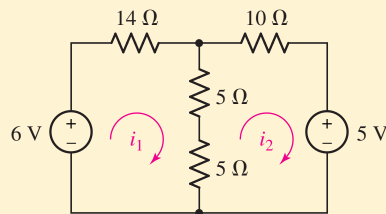
$$-2i_1 + 7i_2 = -3$$

Despejando, se obtiene $i_1 = \frac{43}{38} = 1.132$ A e $i_2 = -\frac{2}{19} = -0.1053$ A.

La corriente que circula hacia afuera de la terminal de referencia positiva de la fuente de 2 V es $i_1 - i_2$. Por lo tanto, la fuente de 2 V suministra $(2)(1.237) = 2.474$ W.

PRÁCTICA

4.6 Determinar i_1 e i_2 en el circuito de la figura 4.18.



■ **FIGURA 4.18**

Respuesta: $i_1 = +184.2$ mA; -157.9 mA.

Examinar en seguida el circuito de cinco nodos, siete ramas y tres mallas que se presenta en la figura 4.19. Es un problema un poco más complicado debido a la malla adicional.

EJEMPLO 4.8

Recurrir al análisis de malla para determinar las tres corrientes de malla en el circuito de la figura 4.19.

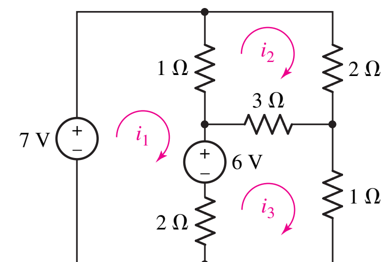
Las tres corrientes de malla requeridas se asignan como se indica en la figura 4.19 y se aplica de manera metódica la LVK en torno a cada malla:

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 6 + 2(i_1 - i_3) = 0$$
$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$
$$2(i_3 - i_1) - 6 + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$

Simplificando,

$$3i_1 - i_2 - 2i_3 = 1$$
$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0$$
$$-2i_1 - 3i_2 + 6i_3 = 6$$

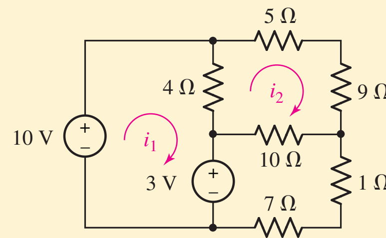
y resolviendo, se obtiene $i_1 = 3$ A, $i_2 = 2$ A e $i_3 = 3$ A.



■ **FIGURA 4.19** Circuito de cinco nodos, siete ramas y tres mallas.

PRÁCTICA

4.7 Determinar i_1 e i_2 en el circuito de la figura 4.20.



■ **FIGURA 4.20**

Respuesta: 2.220 A, 470.0 mA.

Los ejemplos anteriores trataron, exclusivamente, acerca de circuitos alimentados por fuentes de tensión independientes. Si se incluyera en el circuito una fuente de corriente, podría simplificar o complicar el análisis, como se estudió en la sección 4.4. Como se analizó en el estudio de la técnica de análisis nodal, en general las fuentes dependientes requieren de una ecuación adicional además de las *M* ecuaciones de malla, a menos que la variable controladora sea una corriente de malla (o la suma de las corrientes de malla). En el ejemplo siguiente se explica este caso.

EJEMPLO 4.9

Determinar la corriente i_1 del circuito de la figura 4.21*a*.

La corriente i_1 es, en realidad, una corriente de malla, así más que redefinirla, se marca la corriente de malla que está más a la derecha, i_1 y se define una corriente de malla en el sentido de las manecillas del reloj, i_2 para la malla de la izquierda, como se muestra en la figura 4.21*b*.

Si se aplica LVK a la malla izquierda se tiene

$$-5 - 4i_1 + 4(i_2 - i_1) + 4i_2 = 0 \quad [27]$$

y para la malla de la derecha se obtiene,

$$4(i_1 - i_2) + 2i_1 + 3 = 0 \quad [28]$$

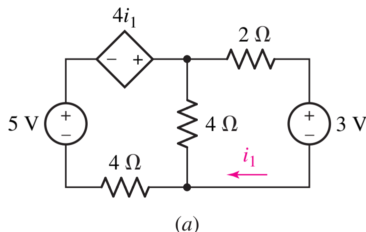
Agrupando términos, estas ecuaciones pueden escribirse de manera más compacta como

$$-8i_1 + 8i_2 = 5$$

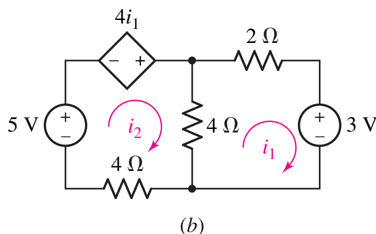
y

$$6i_1 - 4i_2 = -3$$

Despejando, $i_2 = 375$ mA, así que $i_1 = -250$ mA.



(*a*)



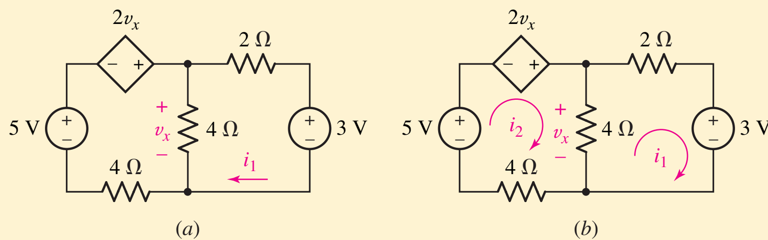
(*b*)

■ **FIGURA 4.21** (*a*) Circuito de dos mallas que contiene una fuente dependiente. (*b*) Circuito marcado para el análisis de mallas.

Puesto que la fuente dependiente de la figura 4.21 está controlada por la corriente de malla (i_1), sólo dos ecuaciones —la [27] y la [28]— se requirieron en el análisis del circuito de dos mallas. En el ejemplo siguiente, se explora la situación que se presenta si la variable controladora *no* es una corriente de malla.

EJEMPLO 4.10

Determinar la corriente i_1 del circuito de la figura 4.22*a*.



■ **FIGURA 4.22** (*a*) Circuito con una fuente dependiente controlada por tensión. (*b*) Circuito marcado para el análisis de mallas.

Con la finalidad de hacer una comparación con el ejemplo 4.9, se utilizan las mismas definiciones de corriente de malla, como se muestra en la figura 4.22*b*.

En la malla de la izquierda, al aplicar LVK se obtiene

$$-5 - 2v_x + 4(i_2 - i_1) + 4i_2 = 0 \qquad [29]$$

y en la malla de la derecha se encuentra lo mismo que antes,

$$4(i_1 - i_2) + 2i_1 + 3 = 0 \qquad [30]$$

Puesto que la fuente dependiente está controlada por una tensión desconocida v_x, se presentan *dos* ecuaciones con *tres* incógnitas. La solución a este dilema es simplemente construir una ecuación con v_x en términos de las corrientes de malla, tales como

$$v_x = 4(i_2 - i_1) \qquad [31]$$

Este sistema de ecuaciones se simplifica si se sustituye la ecuación [31] en la ecuación [29], lo que resulta en

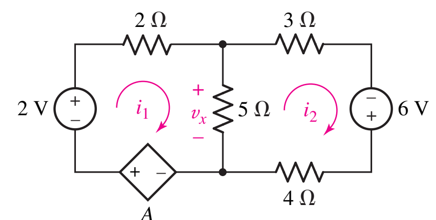
$$4i_1 = 5$$

Simplificando, se encuentra que $i_1 = 1.25$ A. En este ejemplo en particular, la ecuación [30] no es necesaria a menos que se desee obtener un valor para i_2.

PRÁCTICA

4.8 Determinar i_1 en el circuito de la figura 4.23 si la cantidad controladora A es igual a: (*a*) $2i_2$; (b) $2v_x$.

Respuesta: (*a*) 1.35 A; (*b*) 546 mA.



■ **FIGURA 4.23**

El procedimiento del análisis de malla puede resumirse en los siete pasos básicos descritos a continuación, que son válidos en cualquier circuito *plano* aunque la presencia de fuentes de corriente requerirá que se tomen precauciones. Dicha situación se estudia en la sección 4.4.

Resumen del procedimiento básico de análisis de malla

1. **Determinar si el circuito es planar (forma plana)**. Si no, lleve a cabo el análisis nodal.
2. **Contar el número de mallas** (*M*). Volver a dibujar el circuito si es necesario.
3. **Marcar cada una de las corrientes de malla *M***. En general, definir todas las corrientes de malla que circulan en el sentido de las manecillas del reloj facilita el análisis.
4. **Escribir la ecuación LKT en cada malla**. Iniciar con un nodo conveniente y proceder en la dirección de la corriente de malla. Poner especial atención a los signos "−". Si una fuente de corriente se localiza en la periferia de una malla, no es necesaria la ecuación LVK y la corriente de malla se determina por inspección.
5. **Expresar cualquier incógnita adicional como tensiones o corrientes que sean diferentes a las corrientes de malla en términos de las corrientes de malla apropiadas**. Esta situación puede presentarse si, en el circuito, aparecen fuentes de corriente o fuentes dependientes.
6. **Organizar las ecuaciones**. Agrupar términos de acuerdo con las corrientes de malla.
7. **Resolver el sistema de ecuaciones para encontrar las corrientes de malla** (se encontrarán *M* corrientes).

4.4 SUPERMALLA

¿Cómo se debe modificar este procedimiento directo cuando en la red hay una fuente de corriente? Desde la perspectiva del análisis nodal, se requiere percibir que hay dos métodos posibles. Primero, se podría asignar una tensión desconocida a la fuente de corriente, aplicar la LVK alrededor de cada malla como antes, y relacionar luego la fuente de corriente con las corrientes de malla asignadas. Por lo general, éste es el método más difícil.

Una mejor técnica se asemeja bastante al método del supernodo del análisis nodal. En este caso se forma un supernodo al encerrar por completo la fuente de tensión dentro del supernodo y al reducir en 1 el número de nodos de no referencia de cada fuente de tensión. Así se crea un tipo de **"*supermalla*"** a partir de dos mallas que tienen una fuente de corriente como un elemento común: la fuente de corriente está en el interior de la supermalla. De ese modo se reduce en 1 el número de mallas de cada fuente de corriente presente. Si la fuente de corriente se ubica en el *perímetro* del circuito, entonces se pasa por alto la malla simple en la cual se encuentra. Por lo tanto, la ley de Kirchhoff de tensión se aplica sólo en aquellas mallas o supermallas de la red reinterpretada.

EJEMPLO 4.11

Utilizar la técnica del análisis de malla para evaluar las tres corrientes de malla de la figura 4.24*a*.

Aquí se observa que una fuente de corriente independiente de 7 A está en la frontera común de las dos mallas. Las corrientes de malla i_1, i_2 e i_3 ya se han asignado; además la fuente de corriente crea una supermalla cuyo

interior es el de las mallas 1 y 3, como se ilustra en la figura 4.24*b*. Aplicando la LVK alrededor de este lazo,

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$

o

$$i_1 - 4i_2 + 4i_3 = 7 \quad [32]$$

y alrededor de la malla 2,

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

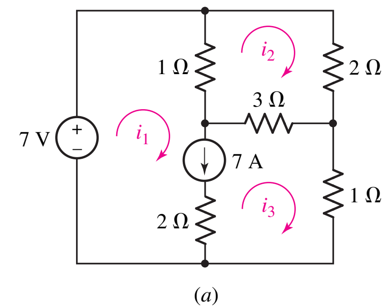
o

$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0 \quad [33]$$

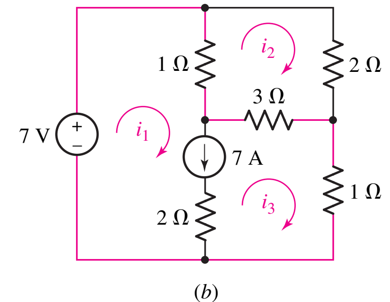
Por último, la corriente de la fuente independiente se relaciona con las corrientes de malla supuestas,

$$i_1 - i_3 = 7 \quad [34]$$

Al resolver las ecuaciones de la [32] a la [34], se encuentra que $i_1 = 9$ A, $i_2 = 2.5$ A e $i_3 = 2$ A.



(*a*)



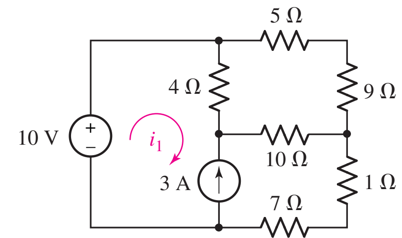
(*b*)

■ **FIGURA 4.24** (*a*) Circuito de tres mallas con una fuente de corriente independiente. (*b*) Supermalla definida mediante línea de colores.

PRÁCTICA

4.9 Determinar la corriente i_1 del circuito de la figura 4.25.

Respuesta: −1.93 A.



■ **FIGURA 4.25**

La presencia de una o más fuentes dependientes requiere tan sólo que cada una de tales cantidades de fuente y la variable de la que dependen se expresan en términos de las corrientes de malla asignadas. En la figura 4.26, por ejemplo, se observa que ambas fuentes de corriente, dependiente e independiente, se incluyen en la red. Se verá cómo afecta su presencia el análisis del circuito y que en realidad lo simplifica.

EJEMPLO 4.12

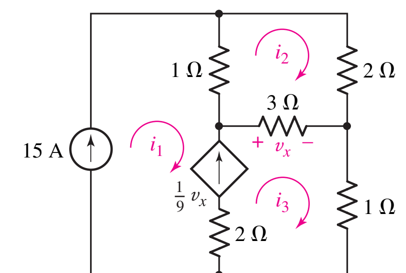
Utilizar el análisis de malla para evaluar las tres corrientes desconocidas en el circuito de la figura 4.26.

Las fuentes de corriente aparecen en las mallas 1 y 3. En razón de que la fuente de 15 A se localiza en el perímetro del circuito, se elimina la malla 1 de la consideración; resulta claro que $i_1 = 15$ A.

Es posible darse cuenta de que debido a que se conoce una de las dos corrientes de malla que son relevantes a la fuente de corriente independiente, no hay necesidad de escribir una ecuación de supermalla alrededor de las mallas 1 y 3. En lugar de hacer eso, simplemente se relacionan i_1 e i_3 con la corriente de la fuente dependiente mediante LCK:

$$\frac{v_x}{9} = i_3 - i_1 = \frac{3(i_3 - i_2)}{9}$$

(Continúa en la siguiente página)



■ **FIGURA 4.26** Circuito de tres mallas con una fuente de corriente dependiente y una independiente.

la cual puede escribirse en forma más compacta como,

$$-i_1 + \frac{1}{3}i_2 + \frac{2}{3}i_3 = 0 \quad \text{o} \quad \frac{1}{3}i_2 + \frac{2}{3}i_3 = 15 \qquad [35]$$

Con una ecuación y dos incógnitas, todo lo que resta es escribir una ecuación LVK alrededor de la malla 2,

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

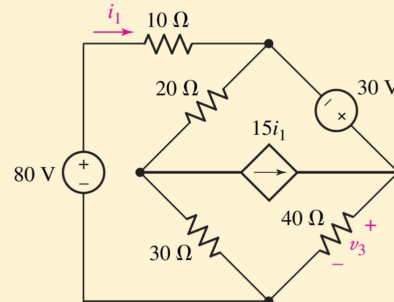
o

$$6i_2 - 3i_3 = 15 \qquad [36]$$

Resolviendo las ecuaciones [35] y [36], se encuentra que $i_2 = 11$ A e $i_3 = 17$ A; por inspección, se determina que $i_1 = 15$ A.

PRÁCTICA

4.10 Utilizar el análisis de malla para determinar v_3 en el circuito de la figura 4.27.



■ **FIGURA 4.27**

Respuesta: 104.2 V.

Ahora se puede resumir el método general para escribir ecuaciones de malla, ya sea que haya fuentes dependientes o no, fuentes de tensión y/o fuentes de corriente, siempre y cuando el circuito pueda dibujarse como un circuito de forma plana:

Resumen del procedimiento de análisis de la supermalla

1. **Determinar si el circuito es un circuito de forma plana**. Si no, llevar a cabo el análisis nodal.
2. **Contar el número de mallas** (*M*). Volver a dibujar el circuito si es necesario.
3. **Marcar cada una de las corrientes de las *M* mallas**. En general, la definición de todas las corrientes de malla que circulen en el sentido de las manecillas del reloj da como resultado un análisis más simple.
4. **Si el circuito contiene fuentes de corriente que están compartidas por dos mallas, formar una supermalla que encierre a ambas mallas**. Un cuadro remarcado es de ayuda al escribir las ecuaciones LVK.
5. **Escribír una ecuación LVK alrededor de cada malla/supermalla**. Iniciar en un nodo adecuado y proceder en la dirección de la corriente de malla. Poner especial atención a los signos "−". Si una fuente de corriente

se localiza en la periferia de una malla, no es necesaria ninguna ecuación LVK y la corriente de malla se determina por inspección.

6. **Relacionar la corriente que circula desde cada fuente de corriente con las corrientes de las mallas**. Esta tarea se lleva a cabo mediante la LCK; se necesita una de tales ecuaciones para cada supermalla que se defina.
7. **Expresar cualquier otra incógnita como corrientes y tensiones, aparte de las corrientes de malla en términos de las corrientes de malla apropiadas**. Esta situación se puede presentar si existen fuentes dependientes en nuestro circuito.
8. **Organizar las ecuaciones**. Agrupar los términos de acuerdo con las tensiones nodales.
9. **Resolver el sistema de ecuaciones para encontrar las tensiones nodales** (se encontrarán M tensiones).

4.5 COMPARACIÓN ENTRE EL ANÁLISIS NODAL Y EL DE MALLA

Ahora que se han examinado dos métodos muy diferentes para analizar circuitos, parece lógico preguntar si se logra alguna ventaja si se utiliza uno u otro. Si el circuito es de forma no plana, entonces no hay elección: sólo se podrá aplicar el análisis nodal.

Sin embargo, siempre que se considere el análisis de un circuito de forma *plana* habrá situaciones en las que una técnica tiene una pequeña ventaja sobre la otra. Si se planea utilizar el análisis nodal, entonces un circuito con N nodos proporcionará a lo más $N - 1$ ecuaciones de la LCK. Cada supernodo definido reducirá de manera adicional en uno este número. Si el mismo circuito tiene M mallas distintas, entonces se obtendrá a lo más M ecuaciones por medio de la LVK; cada supermalla reducirá en uno este número. Con base en estos hechos, se debe elegir el método que producirá el número más pequeño de ecuaciones simultáneas.

Si una o más fuentes dependientes se incluyen en el circuito, cada cantidad controladora puede tener efecto en la elección entre el análisis nodal o de mallas. Por ejemplo, una fuente de tensión dependiente controlada por una tensión nodal no requiere una ecuación adicional cuando se lleva a cabo el análisis nodal. De forma similar, una fuente de corriente dependiente controlada por una corriente de malla no requiere de una ecuación adicional cuando se lleva a cabo el análisis de malla. *¿Qué hay acerca de la situación donde una fuente de tensión dependiente es controlada por una corriente? O de otra forma, ¿dónde es controlada por una tensión una fuente de corriente dependiente?* Siempre que una cantidad controladora puede relacionarse fácilmente con las corrientes de malla, se puede esperar que el análisis de malla sea la opción más conveniente. De manera similar, si la cantidad controladora puede fácilmente relacionarse con las tensiones en los nodos, puede ser preferible el análisis nodal. Un punto final a este respecto es tener en mente la *ubicación* de la fuente: las fuentes de corriente que se ubican en la periferia de una malla, ya sean dependientes o independientes, se manipulan de una manera más fácil con el análisis de malla; las fuentes de tensión conectadas a la terminal de referencia se manejan más fácilmente mediante el análisis nodal.

Si con cualquiera de los métodos se obtiene en esencia el mismo número de ecuaciones, quizás valga la pena considerar también las cantidades que se están buscando. El análisis nodal origina el cálculo directo de tensiones nodales, en tanto que el análisis de malla proporciona corrientes. Si, por ejemplo, se pide determinar

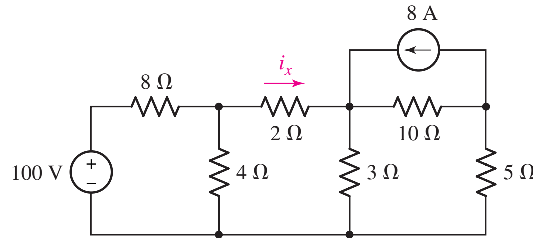


FIGURA 4.28 Circuito de forma plana con cinco nodos y cuatro mallas.

corrientes a través de un conjunto de resistencias, después de efectuar el análisis nodal se debe recurrir aún a la ley de Ohm en cada resistencia para determinar la corriente.

Como ejemplo, considerar el circuito de la figura 4.28. Se desea determinar la corriente i_x.

Se elige el nodo inferior como el de referencia y se observa que hay cuatro nodos de no referencia. Si bien esto significa que es posible escribir cuatro ecuaciones distintas, no hay necesidad de marcar el nodo entre la fuente de 100 V y la resistencia de 8 Ω ya que resulta obvio que la tensión de nodo mide 100 V. En consecuencia, se marcan las siguientes tensiones de nodo v_1, v_2 y v_3 como en la figura 4.29.

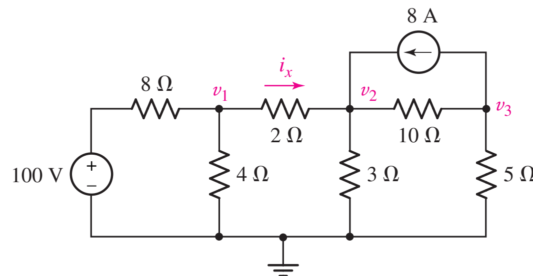


FIGURA 4.29 El circuito de la figura 4.28 con tensiones de nodo marcadas. Observar que se eligió un sistema de tierra física para designar la terminal de referencia.

Se tienen las siguientes tres ecuaciones:

$$\frac{v_1 - 100}{8} + \frac{v_1}{4} + \frac{v_1 - v_2}{2} = 0 \quad \text{o} \quad 0.875v_1 - 0.5v_2 = 12.5 \qquad [37]$$

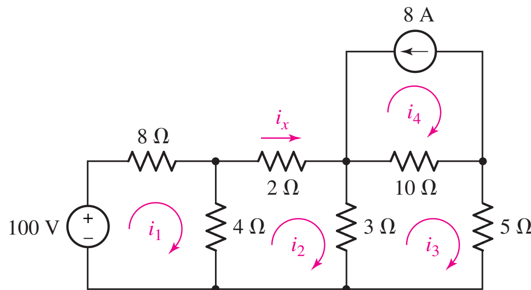
$$\frac{v_2 - v_1}{2} + \frac{v_2}{3} + \frac{v_2 - v_3}{10} - 8 = 0 \quad \text{o} \quad -0.5v_1 - 0.9333v_2 - 0.1v_3 = 8 \qquad [38]$$

$$\frac{v_3 - v_2}{10} + \frac{v_3}{5} + 8 = 0 \quad \text{o} \quad -0.1v_2 + 0.3v_3 = -8 \qquad [39]$$

Resolviendo, se encuentra que $v_1 = 25.89$ V y $v_2 = 20.31$ V. Se determina la corriente i_x mediante la aplicación de la ley de Ohm:

$$i_x = \frac{v_1 - v_2}{2} = 2.79 \text{ A} \qquad [40]$$

En seguida, se considera el mismo circuito mediante el análisis de malla. En la figura 4.30 se tienen cuatro mallas distintas, aunque es evidente que $i_4 = -8$ A; por lo tanto, es necesario escribir tres ecuaciones distintas.



■ **FIGURA 4.30** El circuito de la figura 4.28 con las corrientes de malla marcadas.

Escribiendo una ecuación LKT para las mallas 1, 2 y 3:

$$-100 + 8i_1 + 4(i_1 - i_2) = 0 \quad \text{o} \quad 12i_1 - 4i_2 = 100 \qquad [41]$$

$$4(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0 \quad \text{o} \quad -4i_1 + 9i_2 - 3i_3 = 0 \qquad [42]$$

$$3(i_3 - i_2) + 10(i_3 + 8) + 5i_3 = 0 \quad \text{o} \quad -3i_2 + 18i_3 = -80 \qquad [43]$$

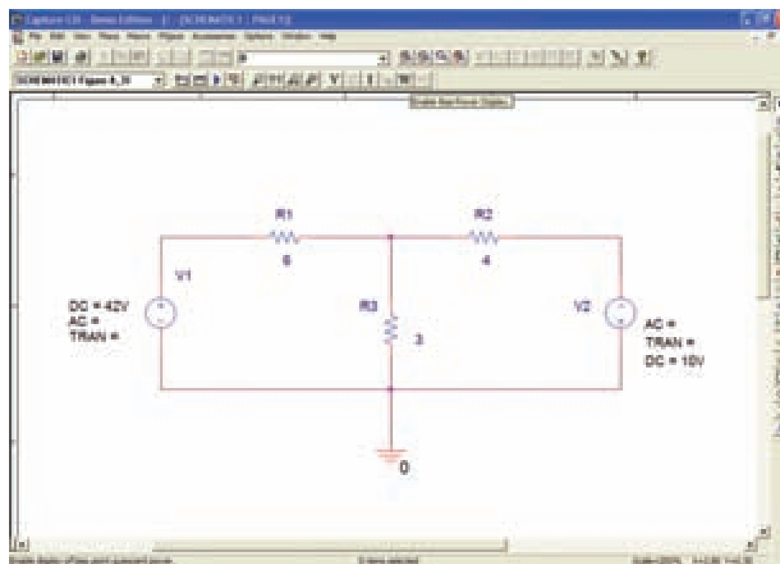
Al resolver, se encuentra que i_2 $(= i_x) = 2.79$ A. Para este problema particular, el análisis de malla mostró ser más simple. No obstante, puesto que cualquier método es válido, si se resuelve el mismo problema de las dos formas también servirá como un medio para verificar las respuestas.

4.6 ANÁLISIS DE CIRCUITOS ASISTIDO POR COMPUTADORA

Hemos visto que no es necesario tomar muchos componentes para crear un circuito de complejidad respetable. A medida que se examinen circuitos incluso más complejos, se evidenciará de inmediato que es fácil cometer errores durante el análisis, y que la verificación de las soluciones de manera manual consume mucho tiempo. Un poderoso programa de computadora, conocido como PSpice, se suele utilizar para analizar rápidamente los circuitos, así que las herramientas de captura de esquemas casi siempre se integran con una tablilla de circuito impreso o una herramienta de visualización de circuito integrado. Creado originalmente a principios de los años de 1970 en la Universidad de California en Berkeley, SPICE (*Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis*) es en la actualidad un estándar industrial. MicroSim Corporation introdujo PSpice en 1984, el cual por medio de interfaces, traza gráficas correspondientes en torno al programa SPICE principal. Según sea el tipo de aplicación de circuitos que se considere, hay en la actualidad varias compañías que ofrecen diferentes versiones del paquete SPICE básico.



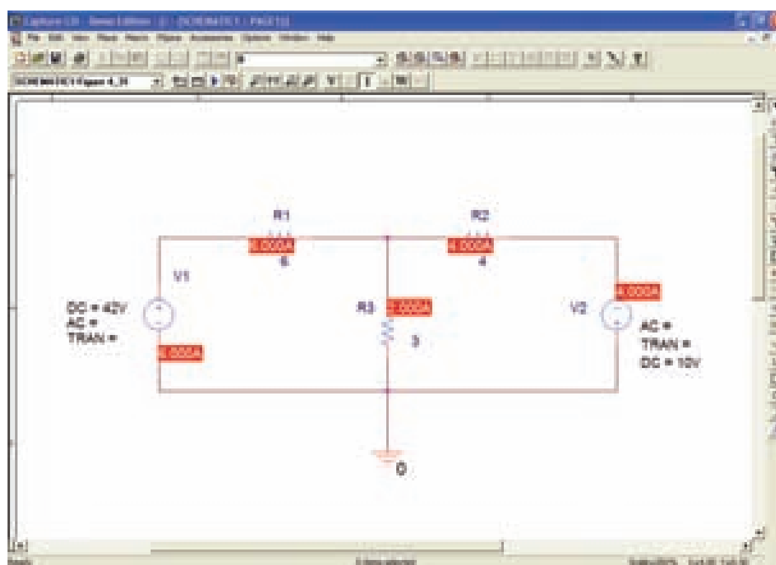
Si bien el análisis asistido por computadora es un medio relativamente rápido para determinar tensiones y corrientes en un circuito, se debe ser cuidadoso de no permitir que los paquetes de simulación reemplacen por completo el análisis tradicional con "papel y lápiz". Existen varias razones que sostienen lo anterior. Primero, para diseñar se debe ser capaz de analizar. La excesiva confianza en las herramientas de cómputo puede inhibir el desarrollo de las capacidades analíticas necesarias, tal como sucedió con la introducción muy temprana de las calculadoras en la escuela elemental. Segundo, es casi imposible utilizar un programa complicado durante un largo tiempo sin cometer algún tipo de error en la entrada de datos. Si no se cuenta con una intuición básica en cuanto al tipo de respuesta que se debe esperar de una simulación, no hay forma de determinar si es o no válida. Por consiguiente, el nombre genérico en realidad es una descripción bastante precisa: análisis *asistido* por computadora. Los cerebros humanos no son obsoletos. No todavía, como quiera que sea.



(*a*)



(*b*)



(*c*)

■ **FIGURA 4.31** (*a*) Circuito de la figura 4.15*a* dibujado mediante el software de captura de esquemas Orcad. (*b*) Botones de despliegue de corriente, tensión y potencia. (*c*) Circuito después de ejecutarse la simulación, con el despliegue de corriente habilitado.

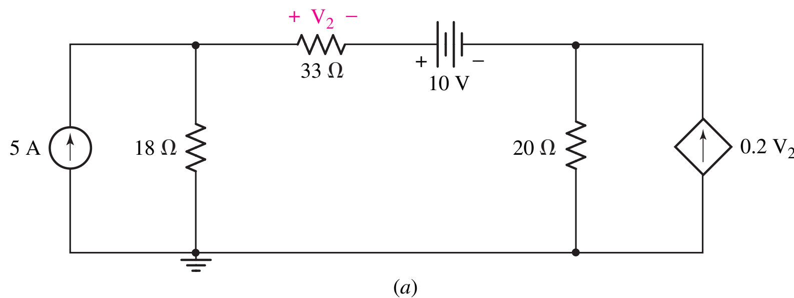
A manera de ejemplo, considere el circuito de la figura 4.15*b*, que incluye dos fuentes de tensión de cd y tres resistencias. Se desea simular este circuito mediante PSpice, de modo que sea posible determinar las corrientes i_1 e i_2. La figura 4.31*a* muestra el circuito en la forma que se dibuja mediante un programa de captura de esquemas.[1]

Con la finalidad de determinar las corrientes de malla, sólo se necesita correr una simulación para encontrar el punto de polarización. Al estar en **PSpice**,

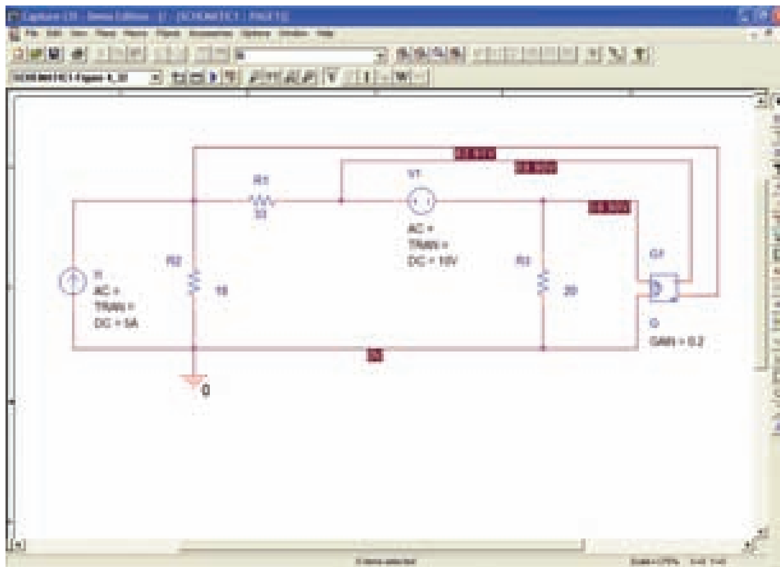
(1) Consultar el apéndice 4 para obtener un breve tutorial sobre PSpice y la captura de diagramas esquemáticos.

seleccionar **New Simulation Profile**. Teclee Primer Ejemplo (o cualquier nombre de su preferencia) y hacer click en **Create**. En el menú **Analysis Type** seleccionar **Bias Point**, después hacer click en **OK**. Regresar a la ventana esquemática original y en **PSpice** seleccionar **Run** (o utilizar alguno de los dos atajos: presionar la tecla F11 o hacer clic en el símbolo azul "Play"). Para ver las corrientes calculadas por PSpice, asegurarse de que el botón corriente esté seleccionado (figura 4.31*b*). Los resultados de la simulación se muestran en la figura 4.31*c*. Se puede observar que las dos corrientes i_1 e i_2 son 6 A y 4 A, respectivamente, como se pudo ver con anterioridad.

Como ejemplo adicional, considerar el circuito de la figura 4.32*a*. Contiene una fuente de tensión de cd, una fuente de corriente de cd y una fuente de corriente controlada por tensión. El foco de atención se concentra en las tres tensiones nodales que, a partir del análisis nodal o de malla, se puede ver que son 82.91V, 69.9 V y 59.9 V, respectivamente, a medida que la mirada se desplaza de izquierda a derecha en la parte superior del circuito. La figura 4.32*b* muestra este circuito, dibujado mediante una herramienta de captura de esquemas, después de haberse llevado a cabo la simulación. Las tres tensiones nodales se indican directamente en el esquema. Observar que al dibujar una fuente dependiente con la herramienta de captura de esquemas se deben enlazar de manera *explícita* dos terminales de la fuente con la tensión o la corriente de control.



(*a*)



(*b*)

■ **FIGURA 4.32** (*a*) Circuito con fuente de corriente dependiente. (*b*) Circuito dibujado con una herramienta de captura de esquemas, cuyos resultados de la simulación se presentan de manera directa sobre el esquema.

APLICACIÓN PRÁCTICA

Creación de diagramas PSpice con base en nodos

El método más común para describir un circuito, en conjunción con el análisis de circuitos asistido por computadora, es un tipo de programa gráfico para dibujo de esquemas, de cuya salida se muestra un ejemplo en la figura 4.32. Sin embargo, SPICE se escribió antes del advenimiento de este tipo de programas, y como tal requiere que los circuitos se describan en un formato específico basado en texto. El formato tiene sus raíces en la sintaxis utilizada en las tarjetas perforadas, lo cual le da una apariencia un poco distinta. La base para describir circuitos es la definición de elementos, así que a cada terminal del mismo se le asigna un número de nodos. De esa manera, aunque se acaban de estudiar dos métodos de análisis de circuitos generalizados diferentes —las técnicas nodal y de malla— resulta interesante observar que SPICE y PSpice se elaboraron mediante un método de análisis nodal muy bien definido.

Aun cuando el análisis moderno de circuitos se hace en gran medida con un software interactivo orientado a gráficas, cuando se generan errores (casi siempre debidos a equivocaciones en el dibujo del esquema o al elegir una combinación de las opciones de análisis), la capacidad para leer la "plataforma de entrada" basada en textos generados por la herramienta de captura de esquemas resulta invaluable para el seguimiento del problema específico. La mejor forma de desarrollar una capacidad de este tipo consiste en aprender la manera de ejecutar PSPICE de manera directa, a partir de una plataforma de entrada escrita por el usuario.

Considere, por ejemplo, la muestra de la plataforma de entrada siguiente (las líneas que empiezan con un asterisco son comentarios, y SPICE las pasa por alto).

```
* Example input deck for a simple voltage divider.
.OP            Se pide a SPICE que determine el punto de operación cd del circuito.
R1 1 2 1k      Se define R1 entre los nodos 1 y 2; tiene un valor de 1 kOhms.
R2 2 0 1k      R2 se define entre los nodos 2 y 0; tiene un valor de 1 kOhms.
V1 1 0 DC 5    V1 se define entre los nodos 1 y 0; tiene un valor de 5 V cd.
* End of input deck.
```

Se puede crear la plataforma de entrada con el programa Notepad de Windows o con su editor de textos favorito. Salvar el archivo bajo el nombre example.cir, invoca a PSpice A/D (vea el apéndice 4). En **File**, se selecciona **Open**, se ubica el directorio en el que se salva el archivo example.cir y para **Files of Type**: se selecciona **Circuit Files (*.cir)**. Después de seleccionar el archivo y hacer clic en **Open**, aparece la ventana PSpice A/D con el archivo de circuito cargado (figura 4.33*a*). Una lista de red como ésta, que contiene instrucciones de la simulación que se va a llevar a cabo, puede hacerse con el software de captura de esquemas o manualmente como en este ejemplo.

Se ejecuta la simulación ya sea haciendo clic en el símbolo "play" en color azul en la parte superior derecha o seleccionando **Run** en **Simulation**. En la esquina inferior izquierda de la ventana principal, una ventana de resumen más pequeña informa que la simulación se ejecutó con éxito (figura 4.33*b*). Para ver los resultados, se selecciona **Output File** del menú **View** en donde se verá:

```
**** 02/18/04 09:53:57 ************** PSpice Lite (Jan 2003) *****************
 * Example input deck for a simple voltage divider.
 ****     CIRCUIT DESCRIPTION
****************************************************************************
.OP
R1 1 2 1k
R2 2 0 1k
V1 1 0 DC 5
* End of input deck.
```

La plataforma de entrada se repite a la salida como referencia y para ayudarle en la verificación de errores.

```
**** 02/18/04 09:53:57 ************** PSpice Lite (Jan 2003) *****************

 * Example input deck for a simple voltage divider.

 ****     SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION       TEMPERATURE =   27.000 DEG C

***************************************************************************

 NODE   VOLTAGE     NODE   VOLTAGE     NODE   VOLTAGE     NODE   VOLTAGE

(    1)    5.0000  (    2)    2.5000

    VOLTAGE SOURCE CURRENTS
    NAME          CURRENT

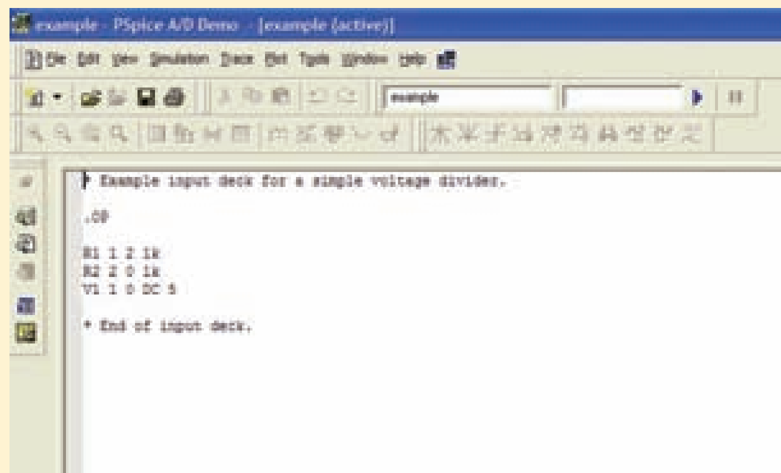
    V1           -2.500E-03

    TOTAL POWER DISSIPATION   1.25E-02  WATTS
```

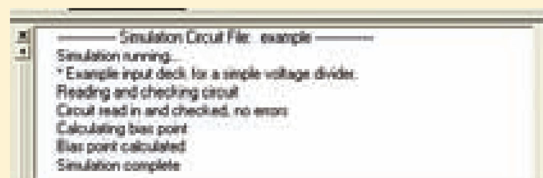
En el resumen de salida, se proporciona la tensión entre cada nodo y el nodo 0. La tensión de 5 V se encuentra conectada entre los nodos 1 y 0; asimismo, la resistencia R2, conectada entre los nodos 2 y 0, tiene una tensión de 2.5 V, como se esperaba.

Observe también una rareza de SPICE: la corriente proporcionada por la fuente se anota utilizando la convención de signos pasiva (es decir −2.5 mA).

Como se puede ver, el uso del método basado en textos para describir circuitos es un poco menos fácil para el usuario, en comparación con las herramientas de captura de esquemas. En particular, resulta muy fácil introducir errores simples (pero importantes) en una simulación si se numeran de manera equivocada los nodos, ya que no hay una visualización directa de la plataforma de entrada, más allá de lo que se escribe en papel. Sin embargo, la interpretación de la salida es bastante directa, así que vale la pena el esfuerzo de practicar la lectura de unos cuantos archivos de este tipo.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 4.33 (*a*) Ventana A/D de PSpice con el archivo del circuito cargado. (*b*) Resumen de la actividad de simulación.

En este punto, el poder real del análisis asistido por computadora empieza a ser patente: una vez que se tiene el circuito dibujado en el programa de captura de esquemas, resulta fácil experimentar con sólo cambiar los valores de los componentes y observar el efecto sobre las corrientes y las tensiones. Para obtener un poco de experiencia a este respecto, tratar de simular cualquiera de los circuitos de los ejemplos previos y de los problemas de práctica.

RESUMEN Y REPASO

- Antes de iniciar un análisis, elaborar un diagrama de circuito claro y simple. Indicar todos los valores de los elementos y de las fuentes.
- Si el análisis nodal es el método elegido,
  - Elegir uno de los nodos como el de referencia. Luego marcar las tensiones de nodo $v_1, v_2, \ldots, v_{N-1}$, recordando que se entiende que cada uno se mide con respecto al nodo de referencia.
  - Si el circuito contiene sólo fuentes de corriente, aplicar la LCK en cada nodo de referencia.
  - Si el circuito consiste en fuentes de tensión, formar un supernodo alrededor de cada una y luego proceder a aplicar la LCK en todos los nodos de no referencia y los supernodos.
- Si se está pensando emplear el análisis de malla, cerciorarse primero de que la red es de forma plana.
  - Asignar una corriente de malla en dirección de las manecillas del reloj en cada malla: $i_1, i_2, \ldots, i_M$.
  - Si el circuito sólo contiene fuentes de tensión, aplicar la LVK alrededor de cada malla.
  - Si contiene fuentes de corriente, crear una supermalla para cada una que sea común a dos mallas y aplicar después la LVK alrededor de cada malla y supermalla.
- Las fuentes dependientes sumarán una ecuación extra al análisis nodal si la variable de control es una corriente, pero no lo hará así si la variable de control es una tensión nodal. De manera contraria, una fuente dependiente agregará una ecuación extra al análisis de malla si la variable de control es una tensión, pero no lo hará así si la variable de control es una corriente de malla.
- Cuando deba decidir si se usa el análisis nodal o el de malla para un circuito plano, pensar que un circuito con menor número de nodos/supernodos dará lugar a menor número de ecuaciones mediante el análisis nodal.
- El análisis asistido por computadora resulta útil para verificar resultados y analizar circuitos con una gran cantidad de elementos. Sin embargo, debe recurrirse al sentido común para verificar los resultados de la simulación.

LECTURAS ADICIONALES

Un tratamiento detallado del análisis nodal y de malla puede encontrarse en:

R.A. DeCarlo y P.M. Lin, *Linear Circuit Analysis,* 2a. edición. Nueva York: Oxford University Press, 2001.

Una sólida guía para utilizar SPICE es

P. Tuinenga, *SPICE: A Guide to Circuit Simulation and Analysis Using PSPICE,* 3a. ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice-Hall,1995.

EJERCICIOS

4.1 Análisis nodal

1. (*a*) Determinar v_2 si $0.1v_1 - 0.3v_2 - 0.4v_3 = 0$, $-0.5v_1 + 0.1v_2 = 4$, y $-0.2v_1 - 0.3v_2 + 0.4v_3 = 6$. (*b*) Evaluar el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

2. (*a*) Encontrar v_A, v_B, y v_C si $v_A + v_B + v_C = 27$, $2v_B + 16 = v_A - 3v_C$, y $4v_C + 2v_A + 6 = 0$. (*b*) Encontrar el determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

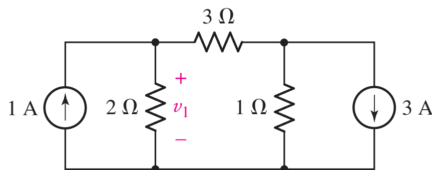


3. (*a*) Resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$4 = v_1/100 + (v_1 - v_2)/20 + (v_1 - v_x)/50$$
$$10 - 4 - (-2) = (v_x - v_1)/50 + (v_x - v_2)/40$$
$$-2 = v_2/25 + (v_2 - v_x)/40 + (v_2 - v_1)/20$$

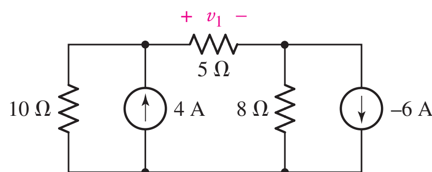
(*b*) Verifica tu solución usando MATLAB.

4. Determinar el valor de la tensión marcada como v_1 en la figura 4.34.



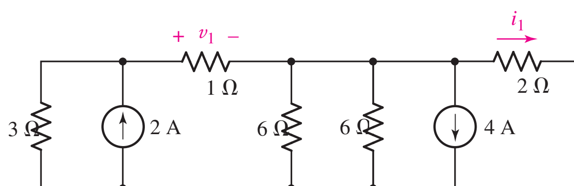
■ **FIGURA 4.34**

5. Determinar el valor de la tensión marcada como v_1 en la figura 4.35.



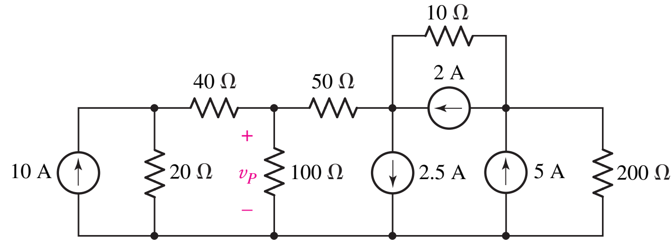
■ **FIGURA 4.35**

6. En el circuito de la figura 4.36, determinar el valor de la tensión marcada como v_1 y la corriente marcada como i_1.

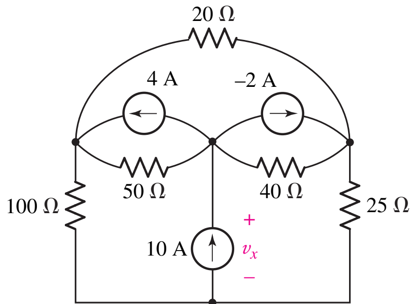


■ **FIGURA 4.36**

7. Recurrir al análisis nodal para determinar v_P en el circuito de la figura 4.37.

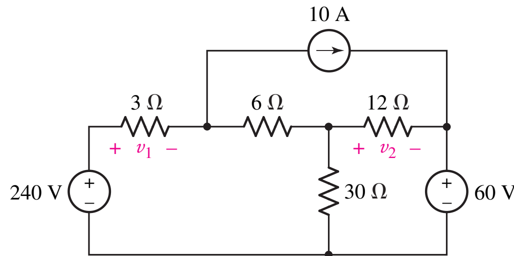


■ **FIGURA 4.37**



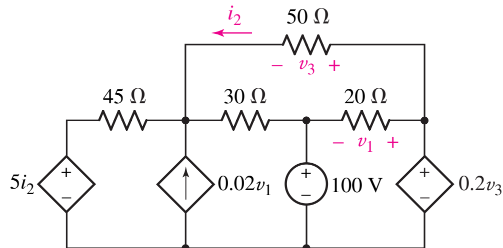
■ **FIGURA 4.38**

8. Utilizar el análisis nodal para determinar v_x en el circuito de la figura 4.38.
9. En el circuito de la figura 4.39, (*a*) utilizar el análisis nodal para determinar v_1 y v_2. (*b*) Calcular la potencia absorbida por la resistencia de 6 Ω.



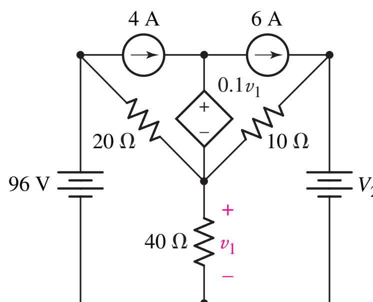
■ **FIGURA 4.39**

10. Aplicar las técnicas del análisis nodal para obtener v_1 e i_2 en el circuito de la figura 4.40.



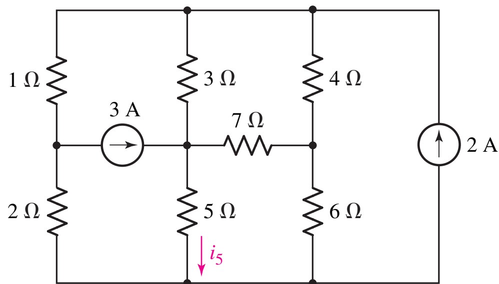
■ **FIGURA 4.40**

11. En el caso del circuito de la figura 4.41, utilizar el análisis nodal para determinar el valor de V_2 que dará origen a $v_1 = 0$.



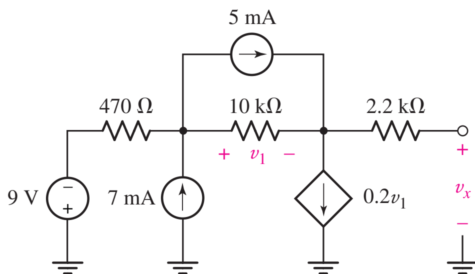
■ **FIGURA 4.41**

12. En el caso del circuito de la figura 4.42, utilizar el análisis nodal para determinar la corriente i_5.



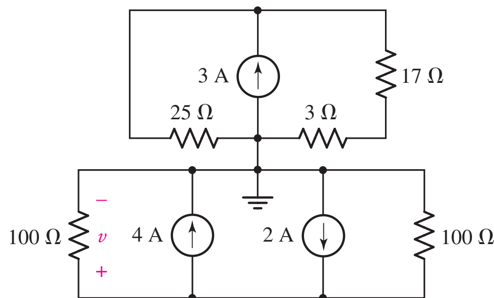
■ **FIGURA 4.42**

13. Emplear el análisis nodal para obtener el valor relativo de v_x como se indica en la figura 4.43.



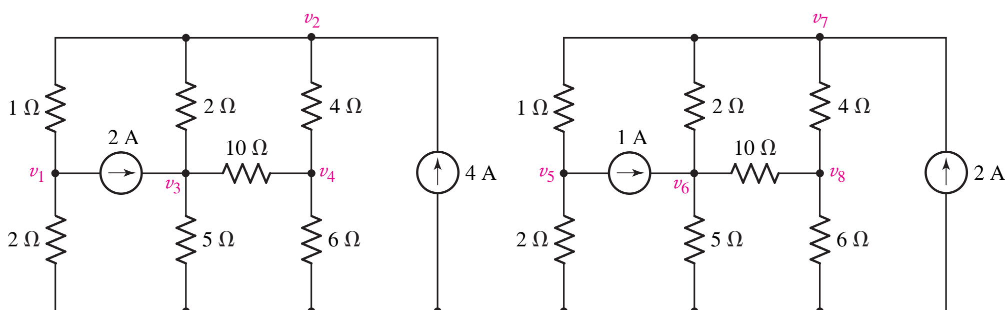
■ **FIGURA 4.43**

14. Determinar la tensión marcada como v en el circuito de la figura 4.44 utilizando técnicas del análisis nodal.



■ **FIGURA 4.44**

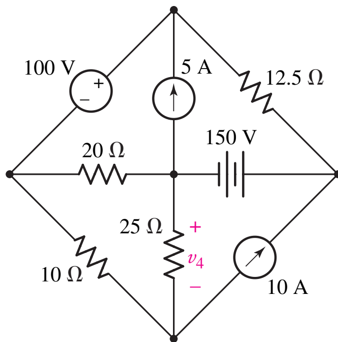
15. Determinar las tensiones nodales que se indican en el circuito de la figura 4.45.



■ **FIGURA 4.45**

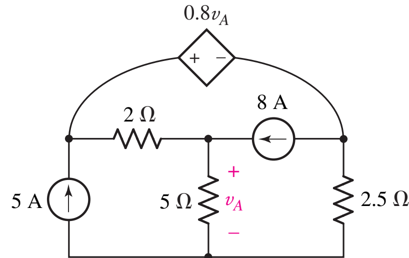
4.2 Supernodo

16. Utilizar el análisis nodal para determinar v_4 en el circuito que se muestra en la figura 4.46.



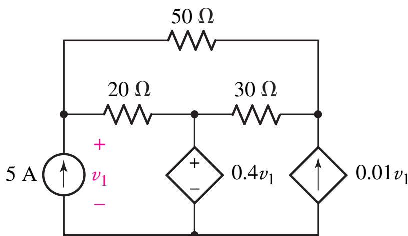
■ **FIGURA 4.46**

17. En el circuito de la figura 4.47, con la ayuda del análisis nodal, determinar (*a*) v_A; (*b*) la potencia disipada por la resistencia de 2.5 Ω.



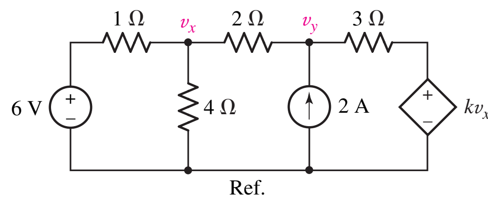
■ **FIGURA 4.47**

18. Utilizar el análisis nodal para determinar v_1 y la potencia que suministra la fuente de corriente dependiente del circuito de la figura 4.48.



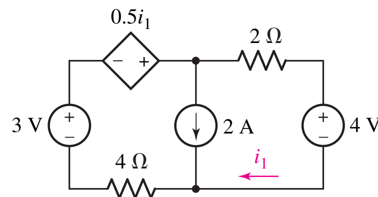
■ **FIGURA 4.48**

19. En la figura 4.49, utilizar el análisis nodal para determinar el valor de k que provocará que v_y sea cero.



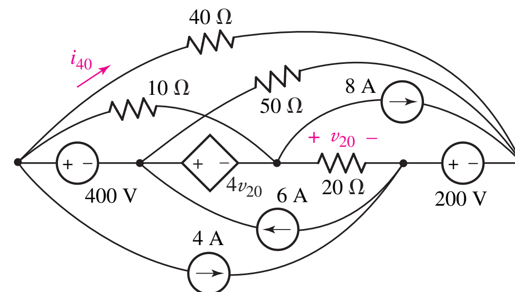
■ **FIGURA 4.49**

20. Considerar el circuito de la figura 4.50. Determinar la corriente marcada como i_1.



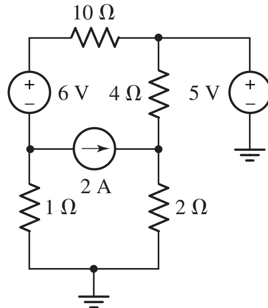
■ **FIGURA 4.50**

21. Recurrir al concepto de supernodo para determinar la tensión marcada como v_{20} en la figura 4.51. Los alambres cruzados que no se marcan mediante un punto grueso no están en contacto físico.

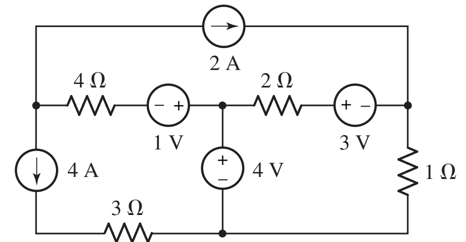


■ **FIGURA 4.51**

22. Para el circuito de la figura 4.52, determinar las cuatro tensiones nodales.



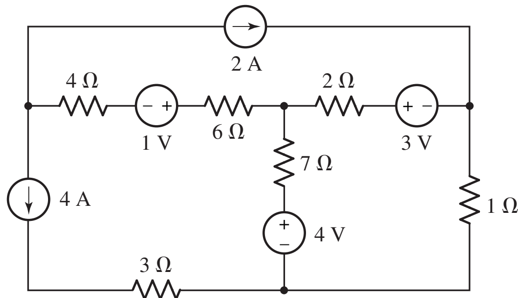
■ **FIGURA 4.52**



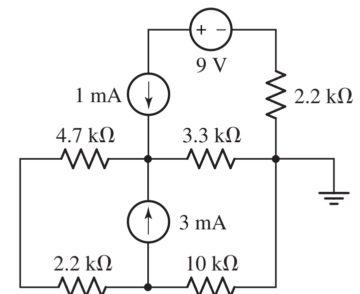
■ **FIGURA 4.53**

23. Calcular la potencia suministrada por la fuente de 2 A en el circuito de la figura 4.53.

24. Obtener la potencia suministrada por la fuente de 2 A en el circuito de la figura 4.54.



■ **FIGURA 4.54**

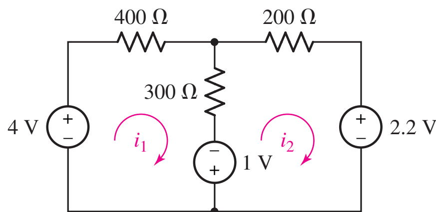


■ **FIGURA 4.55**

25. Determinar las tensiones nodales que caracterizan al circuito de la figura 4.55.

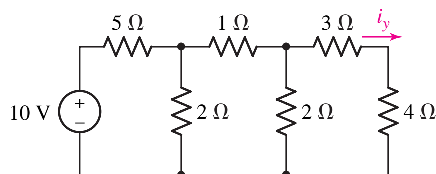
4.3 Análisis de malla

26. Determinar las corrientes de malla i_1 e i_2 que se muestran en el circuito de la figura 4.56.

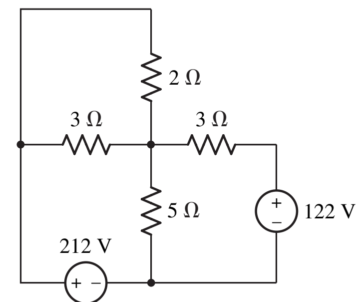


■ **FIGURA 4.56**

27. Utilizar el análisis de malla en el circuito de la figura 4.57 para determinar (*a*) la corriente i_y; (*b*) la potencia suministrada por la fuente de 10 V.



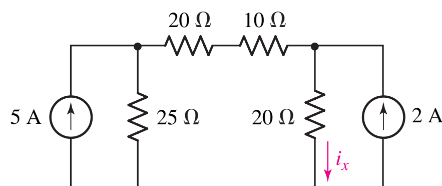
■ **FIGURA 4.57**



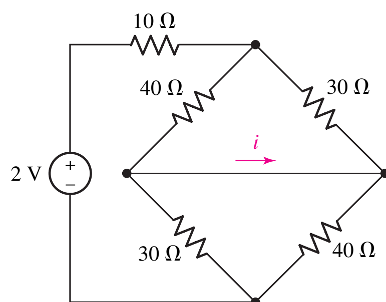
■ **FIGURA 4.58**

28. Utilizar el análisis de malla para determinar la corriente que circula en el circuito de la figura 4.58 a través de (*a*) la resistencia de 2 Ω resistor; (*b*) la resistencia de 5 Ω.

29. Utilizar el análisis de malla en el circuito de la figura 4.59 para determinar (*a*) la corriente marcada como i_x; (*b*) la potencia absorbida por la resistencia de 25 Ω.

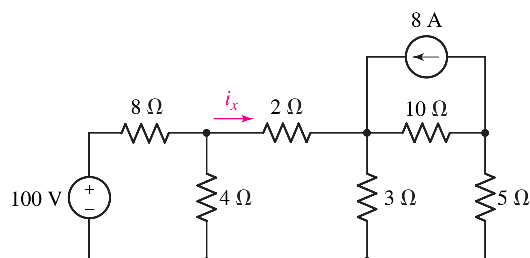


■ **FIGURA 4.59**



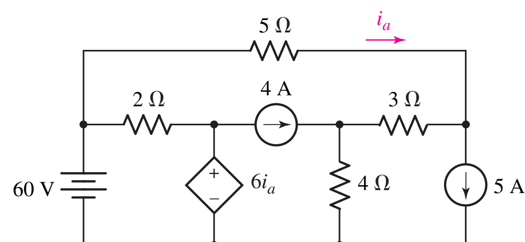
■ **FIGURA 4.60**

30. Utilizar el análisis de malla para determinar la corriente marcada como *i* en el circuito de la figura 4.60.
31. Utilizar el análisis de malla para determinar i_x en el circuito de la figura 4.61.



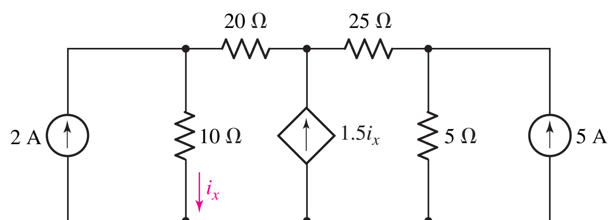
■ **FIGURA 4.61**

32. Calcular la potencia que está disipando la resistencia de 2 Ω del circuito de la figura 4.62.



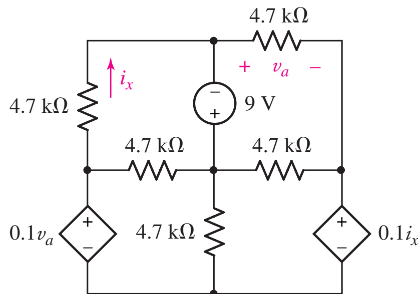
■ **FIGURA 4.62**

33. Utilizar el análisis de malla en el circuito que se muestra en la figura 4.48 para determinar la potencia que suministra la fuente de tensión dependiente.
34. Aplicar el análisis de malla para determinar i_x en el circuito de la figura 4.63.



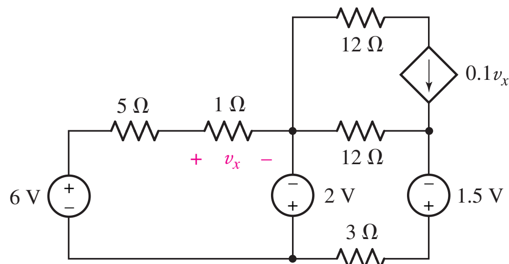
■ **FIGURA 4.63**

35. Determinar las corrientes de malla en la dirección de las manecillas del reloj para el circuito de la figura 4.64.

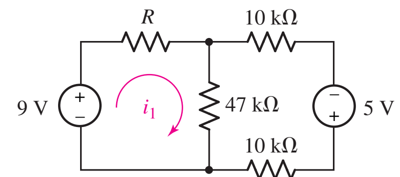


■ **FIGURA 4.64**

36. Calcular cada corriente de malla en el circuito de la figura 4.65.



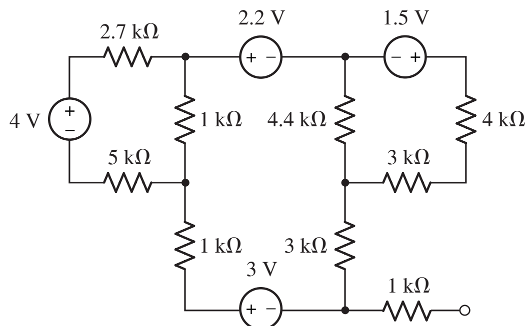
■ **FIGURA 4.65**



■ **FIGURA 4.66**

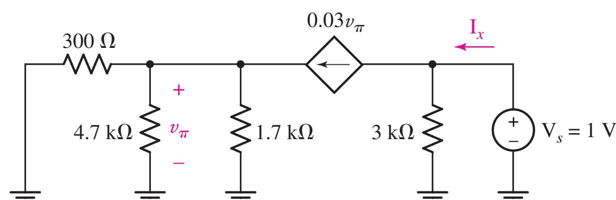
37. (*a*) Con referencia al circuito de la figura 4.66, determinar el valor de *R* si se sabe que la corriente de malla es $i_1 = 1.5$ mA. (*b*) ¿El valor de *R* es necesariamente único? Explique su respuesta.

38. Utilizar la técnica del análisis de malla en el circuito de la figura 4.67 para calcular la potencia que absorbe cada resistencia.

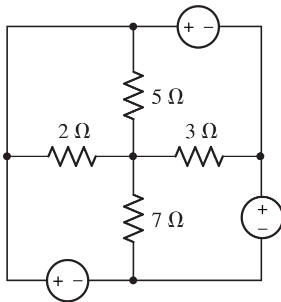


■ **FIGURA 4.67**

39. El circuito que se presenta en la figura 4.68 es el equivalente de un amplificador transistorizado de unión bipolar de base común. La fuente de entrada se puso en



■ **FIGURA 4.68**



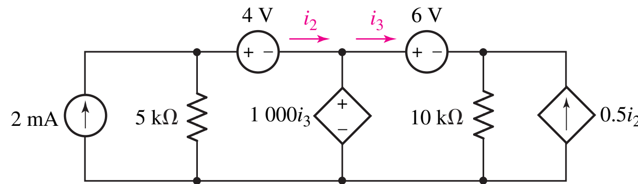
■ **FIGURA 4.69**

cortocircuito y una fuente de 1 V se sustituyó por el dispositivo de salida. (*a*) Utilizar el análisis de malla para determinar I_x. (*b*) Verificar su solución correspondiente al inciso (*a*) mediante el análisis nodal. (*c*) ¿Cuál es el significado físico de la cantidad V_s/I_x?

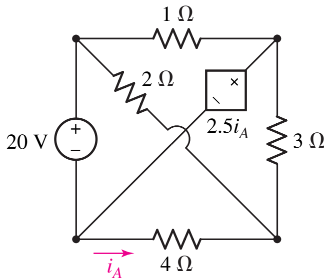
40. Elegir valores distintos de cero para las tres fuentes de tensión de la figura 4.69 de manera que ninguna corriente circule a través de ninguna resistencia del circuito.

4.4 Supermalla

41. Utilizar el análisis de malla para determinar la potencia generada por cada una de las cinco fuentes de la figura 4.70.



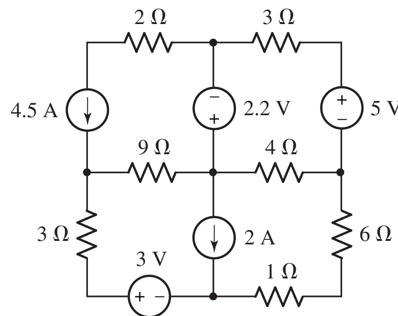
■ **FIGURA 4.70**



■ **FIGURA 4.71**

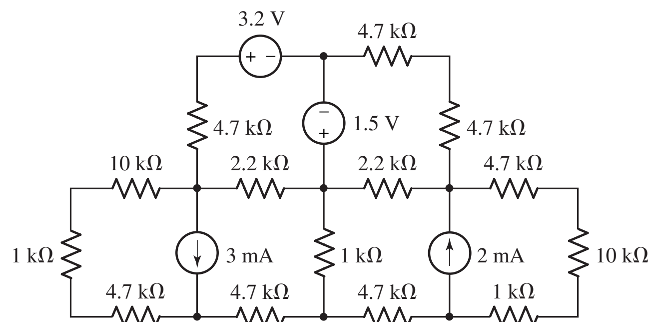
42. Determinar i_A en el circuito de la figura 4.71.

43. Utilizar el concepto de supermalla para determinar la potencia suministrada por la fuente de 2.2 V de la figura 4.72.



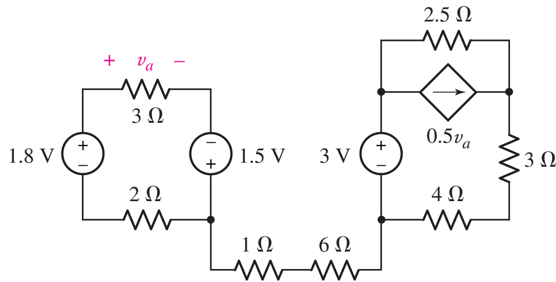
■ **FIGURA 4.72**

44. Calcular la tensión en la fuente de 2 mA de la figura 4.73, suponiendo que el nodo inferior está conectado a tierra.



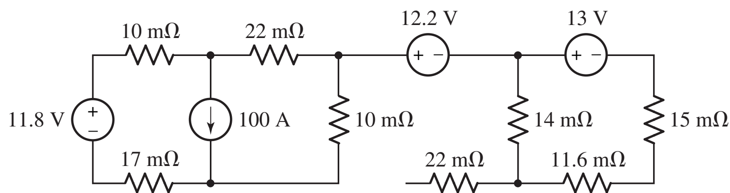
■ **FIGURA 4.73**

45. Utilizar el análisis de malla para obtener la tensión en la resistencia de 2.5 Ω de la figura 4.74.



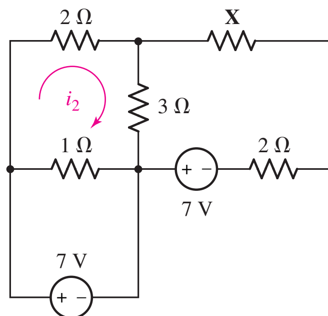
■ **FIGURA 4.74**

46. Calcular las corrientes de malla del circuito de la figura 4.75.



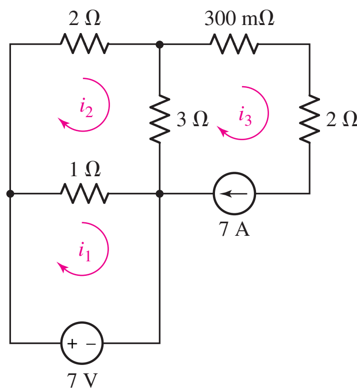
■ **FIGURA 4.75**

47. En el caso del circuito de la figura 4.76, determinar el valor del resistor **X** si $i_2 = 2.273$ A.



■ **FIGURA 4.76**

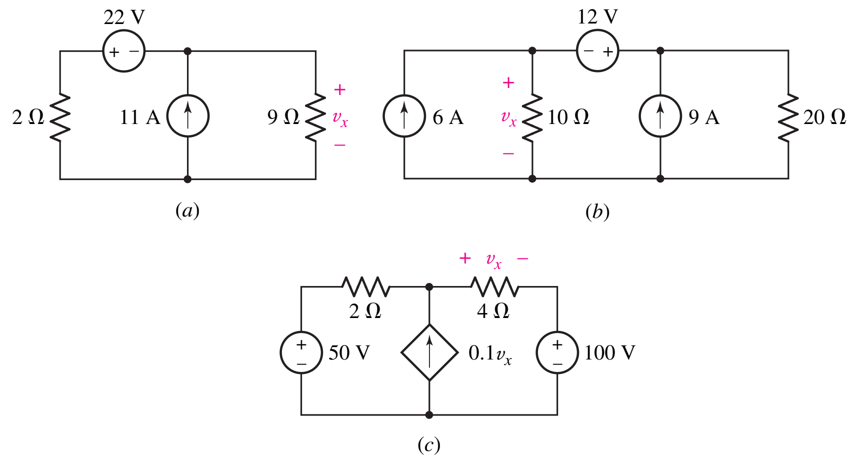
48. Considerar el circuito de la figura 4.77. Calcular las tres corrientes de malla que se indican.



■ **FIGURA 4.77**

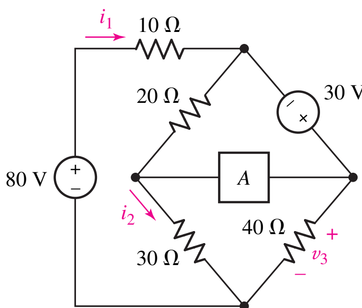
4.5 Comparación entre el análisis nodal y el de malla

49. Determinar la tensión denominada v_x en cada uno de los circuitos de la figura 4.78.

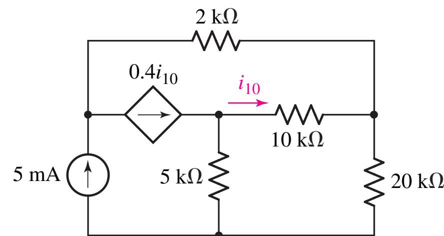


■ **FIGURA 4.78**

50. Encontrar v_3 del circuito de la figura 4.79 si el elemento A es (a) un cortocircuito; (b) una fuente de tensión independiente de 9 V, con la referencia positiva a la izquierda; (c) una fuente de corriente dependiente, con la punta de la flecha hacia la izquierda y marcada como $5i_1$.
51. Determinar las corrientes i_1 e i_2 del circuito de la figura 4.79 si el elemento A es una resistencia de 12 Ω. Explicar la lógica que fundamenta su elección del análisis, ya sea nodal o de malla.
52. Obtener el valor de la corriente designada i_{10} en el circuito de la figura 4.80.

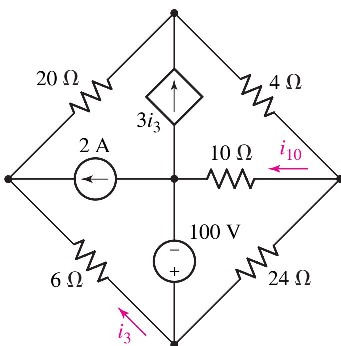


■ **FIGURA 4.79**

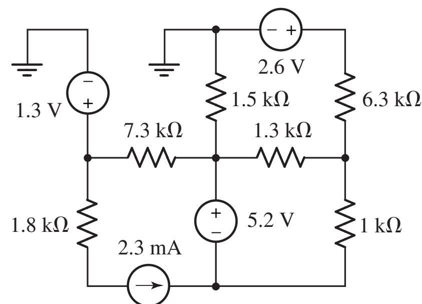


■ **FIGURA 4.80**

53. Calcular las dos corrientes marcadas en el circuito de la figura 4.81.
54. En el caso del circuito de la figura 4.82, proporcionar la tensión del nodo central.

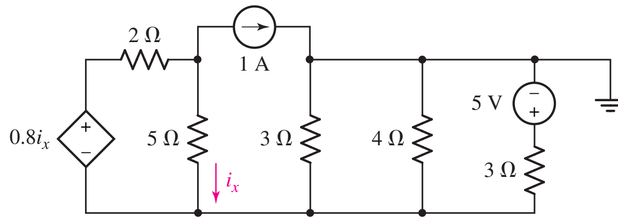


■ **FIGURA 4.81**



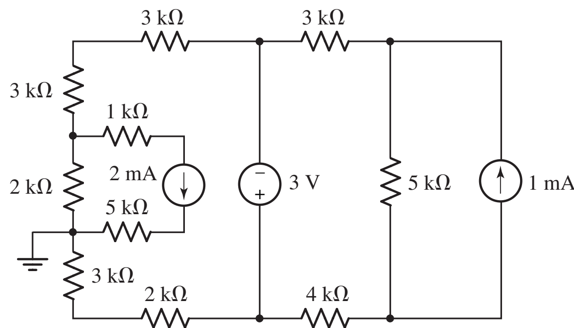
■ **FIGURA 4.82**

55. Determinar la corriente a través de cada rama del circuito de la figura 4.83.



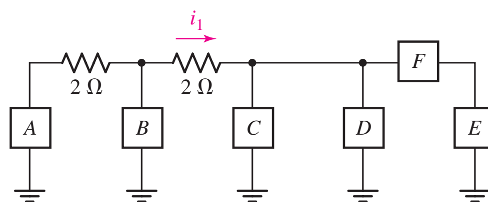
■ **FIGURA 4.83**

56. Calcular la tensión en la fuente de corriente de 2 mA de la figura 4.84.



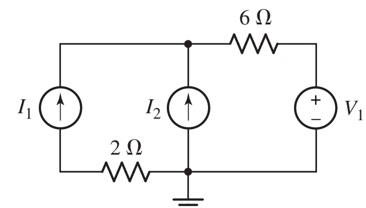
■ **FIGURA 4.84**

57. En el caso del circuito de la figura 4.85, sea *A* una fuente de tensión de 5 V con referencia positiva en la parte superior, *B* una fuente de corriente de 3 A con la flecha apuntando hacia la conexión a tierra, *C* una resistencia de 3 Ω a una fuente de corriente de *D* a una fuente de corriente de 2 A con la flecha apuntando hacia la conexión a tierra, *F* una fuente de tensión de 1 V con referencia negativa a la derecha y *E* una resistencia de 4 Ω. Calcular i_1.



■ **FIGURA 4.85**

58. Elegir cualquier valor distinto de cero para I_1, I_2 y V_1 de modo que la resistencia de 6 Ω en el circuito de la figura 4.86 disipe 6 W.
59. En el caso del circuito de la figura 4.84, sustituir la fuente de corriente de 2 mA por una fuente de tensión de 2 V, y la fuente de 3 V por una fuente de corriente de 7 mA. Determinar las corrientes de malla del nuevo circuito.
60. En el circuito de la figura 4.85, *A* es una fuente de corriente dependiente cuya flecha apunta hacia abajo y con valor de $5i_1$. Sean *B* y *E* resistencias de 2 Ω cada uno, *C* una fuente de corriente de 2 A cuya flecha apunta hacia la conexión a tierra, *F* una fuente de tensión de 2 V con la referencia negativa conectada a tierra, y *D* una fuente de corriente de 3 A con la flecha en la parte superior; calcular las tensiones nodales y las corrientes de malla.



■ **FIGURA 4.86**

4.6 Análisis de circuitos asistido por computadora

61. Utilizar PSpice para verificar la solución del ejercicio 52. Presentar la impresión de un diagrama marcado en forma apropiada. Incluir los cálculos manuales.
62. Utilizar PSpice para verificar la solución del ejercicio 54. Presentar la impresión de un esquema marcado en forma apropiada. Incluir los cálculos manuales.
63. Con PSpice verificar la solución del ejercicio 56. Presentar la impresión de un esquema marcado de manera apropiada. Incluir los cálculos manuales.
64. Mediante PSpice comprobar la solución del ejercicio 58. Presentar la impresión de un esquema marcado de manera apropiada. Incluir los cálculos manuales.
65. Utilizar PSpice para obtener la solución del ejercicio 60. Presentar la impresión de un esquema marcado de manera apropiada. Incluir los cálculos manuales.
66. Construir un circuito compuesto por una fuente de 5 V en serie con una resistencia de 100 Ω conectada a una red que incluye al menos una fuente de 3 A, tres resistencias diferentes y una fuente de corriente controlada por tensión que depende de la tensión en los extremos de la resistencia de 100 Ω. (*a*) Determinar todas las tensiones de nodo y todas las corrientes de rama. (*b*) Utilizar PSpice para verificar sus resultados.
67. Construir un circuito mediante una batería de 10 V, una fuente de 3 A y tantas resistencias de 1 Ω como sea necesario para obtener un potencial de 5 V en los extremos de una fuente de 3 A. Comprobar sus cálculos manuales con PSpice.
68. Elaborar una plataforma de entrada apropiada para SPICE a fin de determinar v_5 en el circuito de la figura 4.87. Presentar una impresión del archivo de salida, con la solución subrayada.

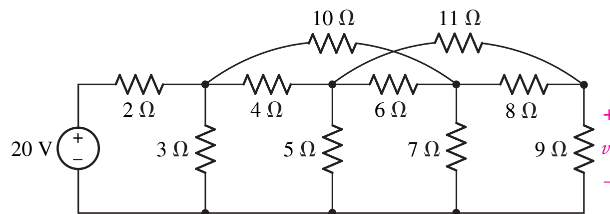


FIGURA 4.87

69. Diseñar un circuito utilizando únicamente baterías de 9 V y resistencias que proporcionen tensiones nodales de 4 V, 3 V y 2 V. Escribir una plataforma de entrada apropiada para SPICE a fin de simular su solución y presentar una impresión del archivo de salida con las tensiones deseadas subrayadas. Dibujar un diagrama marcado sobre la impresión como referencia, con los números de nodo identificados.
70. Una cadena muy larga de luces exteriores multicolores se instala sobre una casa. Después de aplicar la potencia, el propietario observa que se han quemado dos focos eléctricos. (*a*) ¿Las luces están conectadas en serie o en paralelo? (*b*) Elaborar una plataforma de entrada SPICE para simular las luces, suponiendo un alambre de calibre 20 AWG, 115 V ca del suministro de potencia y un valor nominal de los focos individuales de 1 W. Hay 400 luces en la cadena; por simplicidad simular un circuito eléctricamente equivalente con tan sólo 25 componentes. Presentar una impresión del archivo de salida, subrayando la potencia suministrada por la toma de corriente de pared. (*c*) Después de sustituir las focos fundidos, el propietario observa que las luces más cercanas a la toma de corriente son casi 10% más brillantes que las luces del otro extremo de la cadena. Dar una posible explicación, sin olvidar que ningún elemento de la cadena es de cero ohms.